

## 7 Schwingungen

Periodische Zustandsänderungen oder periodische Umwandlungen zwischen zwei Energieformen sind charakteristisch für Schwingungen und Wellen. Die einfachste periodische mathematische Funktion ist die Sinus-Funktion. Periodische Funktionen sind allgemein eine Wiederholung von Mustern nach festen Zeitintervallen  $T$ , d. h.  $y(t) = y(t + T)$ . Weitere Beispiele wie Rechteck-Funktion oder Sägezahn-Funktion sind schwieriger durch analytische Funktionen zu beschreiben.



Wesentliches Merkmal von Schwingungen sind Frequenz ( $f$  oder  $\nu$ ) bzw. Schwingungsdauer  $T$ , es gilt  $\nu = 1/T$ . Schwingungen treten bei Einzelelementen auf, z. B. Pendel einer Uhr.

Im Raum fortschreitende Wellen werden durch Kopplung schwingender Teilchen erzeugt, z. B. Schallwellen durch schwingende Atome oder Moleküle. Bei elektromagnetischen Wellen schwingen keine atomaren Teilchen, nur Photonen (ohne Ruhemasse). Wellen werden durch Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit charakterisiert, siehe Kapitel 8.

### 7.1 Harmonische Schwingungen

Schwingungen gelten als frei, wenn kein äußerer periodischer Einfluss vorliegt. Ungedämpfte Schwingungen haben eine konstante Amplitude.

Eine harmonische Funktion lässt sich mit einer konstanten Amplitude  $A$  und einer Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  durch

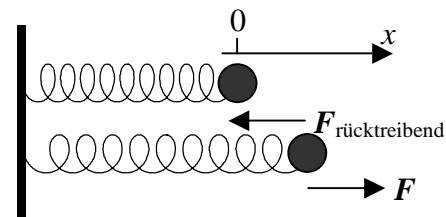
$$x = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.01)$$

beschreiben, wobei  $\varphi$  die Anfangsphase zum Zeitpunkt  $t = 0$  beschreibt. Es lässt sich durch einfache mathematische Umformungen mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Umformungen zeigen, dass eine Summe von Funktionen gleicher Frequenz aber unterschiedlicher Amplituden  $A_i$  und Phasen  $\varphi_i$  wiederum eine Sinus-Funktion mit der Frequenz  $\omega$  ergibt.

### 7.2 Bewegungsgleichungen freier ungedämpfter Schwingungen

Im rechten Federmodell gilt mit der Federkonstanten  $c$  für die rücktreibende Federkraft einerseits  $F_{\text{rück}} = -c x$  und andererseits die Newtonsche Bewegungsgleichung  $F_{\text{rück}} = m a$ . Aus Gleichsetzung folgt

$$-c x = m a = m \ddot{x}. \quad (7.02)$$



G (7.02) umgeschrieben ergibt

$$m \ddot{x} + c x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} x = 0. \quad (7.03)$$

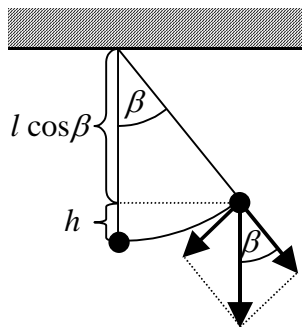
G (7.03) ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Solche Gleichungen werden mit einem (willkürlichen) Ansatz gelöst, hier:  $x = x_0 \cos \omega_0 t$ , wobei  $x_0$  eine konstante Amplitude und  $\omega_0$  eine konstante Kreisfrequenz darstellen. Dieser Ansatz in G (7.03) eingesetzt, ergibt nach zweimaliger Differentiation

$$-\omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t + \frac{c}{m} x_0 \cos \omega_0 t = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{c}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (7.04)$$

Lösungsansatz ist Weg-Zeit-Gesetz, Differentiation ergibt Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Zeit Gesetze:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega_0 t, & x_{\max} &= x_0, \\ v(t) &= -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t, & v_{\max} &= \omega_0 x_0, \\ a(t) &= -x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t, & a_{\max} &= \omega_0^2 x_0. \end{aligned} \quad (7.05)$$

Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind jeweils um  $90^\circ$  phasenverschoben. Praxisrelevanter schwingende Systeme sind Pendel unter dem Einfluss der Schwerkraft.



**Das mathematische Pendel** besteht aus einer Masse  $m$  (Massepunkt) an einem masselosen Faden der Länge  $l$ . Nach G (4.18) gilt für die Gesamtenergie  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant}$ .

Es ist  $E_{\text{pot}} = m g h = m g l (1 - \cos \beta)$  und  $E_{\text{kin}} = m v^2 / 2 = m (l \dot{\beta})^2 / 2$ .

Aus der Forderung Energieänderung gleich null ergibt sich

$$\frac{d(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}})}{dt} = ml^2 \dot{\beta} \ddot{\beta} + mgl \dot{\beta} \sin \beta = 0 \quad (7.06)$$

Aus G (7.06) ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{l} \sin \beta = 0 \quad \xrightarrow{\text{für kleine Winkel ist } \sin \beta \approx \beta} \ddot{\beta} + \frac{g}{l} \beta = 0. \quad (7.07)$$

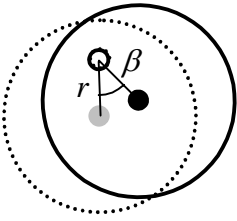
Die Aussage  $\sin \beta \approx \beta$  für kleine Winkel lässt sich mit der Reihenentwicklung beweisen:

$\sin \beta = \beta - \beta^3/3! + \beta^5/5! - \beta^7/7! + \dots$  Für eine Auslenkung von  $10^\circ$  ist das Bogenmaß  $(10/360) \times 2\pi \text{ rad} = 0,1745 \text{ rad}$ . Damit ist  $\beta = 0,1745$  und  $\beta^3/3! = 0,000886$ , d. h. 0,5% von  $\beta$ .

Mit dem Lösungsansatz  $\beta(t) = \beta_0 \cos \omega_0 t$  ergibt sich aus G (7.07)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7.08)$$

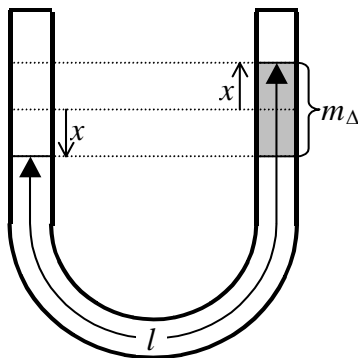
Schwingungsdauer ist unabhängig von Masse, und mit der Standard-Fallbeschleunigung von  $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$  ergibt sich für ein Sekundenpendel (Schwingungsdauer  $T = 2 \text{ s}$ ) eine Pendellänge von  $0,9936 \text{ m}$ .



Das **physikalische Pendel** besteht aus einem Festkörper, der um die Achse A (kleiner Kreis in linker Abb.) mit dem Abstand  $r$  vom Schwerpunkt S pendelt. Mit  $E_{\text{kin}} = (1/2) I_A \dot{\beta}^2$  ergibt sich analog zum Übergang von G (7.06) zu (7.07) zu (7.08) für kleine Winkel

$$\ddot{\beta} + \frac{mgr}{I_A} \beta = 0 \quad \text{und daraus} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I_A}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgr}}. \quad (7.09)$$

Vergleicht man Schwingungsfrequenz oder -dauer des physikalischen mit dem mathematischen Pendel, G (7.08) mit G (7.09), ergibt sich Gleichheit für  $l = I_A/mr$ . Diese Länge nennt man reduzierte Pendellänge  $l_{\text{red}}$  des physikalischen Pendels.



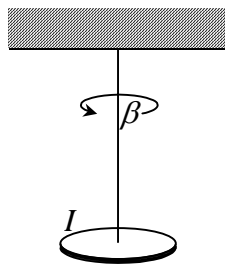
Das **Flüssigkeitspendel im U-Rohr** kann ebenfalls analog zu mathematischen Pendel behandelt werden. Im Ruhezustand stehen beide Wasserspiegel bei der mittleren Linie. Im ausgelenkten Zustand  $x$  steht der Anteil  $m_{\Delta}$  der Gesamtmasse des Wassers  $m_{\text{gesamt}}$  im linken über dem rechten Wasserspiegel. Die zu G (7.02) analoge Gleichung (rücktreibende Kraft gleich Masse mal Beschleunigung) ist

$$-m_{\Delta} g = m_{\text{gesamt}} \ddot{x}. \quad (7.10)$$

Bei einem inneren Querschnitt des Rohres  $A$  und einer Dichte der Flüssigkeit  $\rho$  und einer konstanten Gesamtlänge der Wassersäule von  $l$  gilt  $m_{\Delta} = 2A x \rho$  und  $m_{\text{gesamt}} = A l \rho$ . Damit folgt aus G (7.10)

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0 \quad \text{und daraus} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}. \quad (7.11)$$

Das Flüssigkeitspendel ist also analog zum mathematischen Pendel, wenn man in dessen Gleichungen die halbe Flüssigkeitssäule einsetzt.



Der **Torsionsschwinger** erfährt ein Rückstellmoment durch die elastischen Eigenschaften des Aufhängers (Unruhfeder bei Uhr), das entgegengesetzt zum Drehwinkel  $\beta$  wirkt. Die im Schwerpunkt aufgehängte Scheibe habe zur Drehachse ein Trägheitsmoment  $I$ . Die zu G (7.02) analoge Gleichung heißt hier: rücktreibendes Drehmoment gleich Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung. Damit ergibt sich ohne Einschränkung auf kleine Winkel

$$-c \beta = I \ddot{\beta} \quad (7.12)$$

oder

$$\ddot{\beta} + \frac{c}{I} \beta = 0 \quad \text{und daraus} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{I}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}. \quad (7.13)$$

Für die **Schwingungsenergie** gilt der mechanische Energieerhaltungssatz  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant}$ . Damit kann man für die Gesamtenergie die maximale kinetische Energie setzen. Zum Zeitpunkt der maximalen kinetischen Energie ist die potentielle Energie null. Mit  $v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$  zeigt sich, dass die Energie mit dem Quadrat der Frequenz wächst

$$E = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2. \quad (7.14)$$

### 7.3 Bewegungsgleichungen freier gedämpfter Schwingungen

Reibungskräfte  $F_R$  sind konstant (Gleit oder Rollreibung), oder proportional zur Geschwindigkeit (Newtonsche Reibung, viskose Reibung) oder proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit (Luftreibung). Wir betrachten hier nur die Newtonsche Reibung einer Feder-schwingung (Ähnlichkeit zur elektromagnetischen Schwingung) mit dem Dämpfungskoeffizienten  $b$ , definiert durch  $F_R = -bv$ . Die Differentialgleichung ist

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0, \quad (7.15)$$

wobei die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung wieder  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  ist.

Folgende Parameter werden eingeführt:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{b}{2m} && \text{Abklingkoeffizient, Dimension s}^{-1}, \\ D &= \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} && \text{Dämpfungsgrad, dimensionslos,} \\ d &= 2D = \frac{b}{m\omega_0} = \frac{b}{\sqrt{mc}} && \text{Verlustfaktor, dimensionslos,} \\ Q &= \frac{1}{d} = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{\sqrt{mc}}{b} && \text{Güte, dimensionslos.} \end{aligned}$$

Damit schreibt sich G (7.15) als

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.16)$$

Als Lösungsansatz wird  $x = x_0 \exp(ut)$  gewählt. Einsetzen in die Differentialgleichung (7.16) ergibt  $u^2 + 2D\omega_0 u + \omega_0^2 = 0$ . Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen:

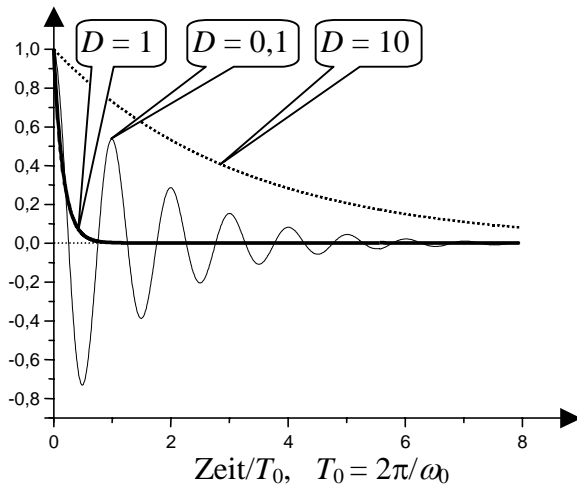
$u_+ = -D\omega_0 + (D^2\omega_0^2 - \omega_0^2)^{1/2}$  und  $u_- = -D\omega_0 - (D^2\omega_0^2 - \omega_0^2)^{1/2}$ . Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Linearkombination dieser beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} x &= x_+ \exp\left[-(D - \sqrt{D^2 - 1})\omega_0 t\right] + x_- \exp\left[-(D + \sqrt{D^2 - 1})\omega_0 t\right] \\ &= (x_+ + x_-) \exp[-D\omega_0 t] \times \left( \frac{x_+}{x_+ + x_-} \exp\left[+\sqrt{D^2 - 1}\omega_0 t\right] + \frac{x_-}{x_+ + x_-} \exp\left[-\sqrt{D^2 - 1}\omega_0 t\right] \right) \\ &= \frac{x_0}{2} \exp[-D\omega_0 t] \times \\ &\quad \left( \left\{ 1 + \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right\} \exp\left[+i\sqrt{1 - D^2}\omega_0 t\right] + \left\{ 1 - \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right\} \exp\left[-i\sqrt{1 - D^2}\omega_0 t\right] \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die Koeffizienten  $x_+$  und  $x_-$  werden durch die Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = 0$  festgelegt. Mit

$$x_+ + x_- = x_0 \quad \text{und} \quad x_+ = \frac{x_0}{2} \left\{ 1 + \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right\}, \quad x_- = \frac{x_0}{2} \left\{ 1 - \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right\}. \quad (7.18)$$

begründet sich das dritte Gleichheitszeichen in G (7.17).



Der **Schwingfall** entspricht  $D < 1$ .

Für  $D \ll 1$  sind die rechten Summanden in den geschweiften Klammern von G (7.18) bzw. G (7.17) gegenüber eins vernachlässigbar. Wegen der Beziehungen  $\exp(+i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$  und  $\exp(-i\alpha) = \cos \alpha - i \sin \alpha$  gilt  $\exp(+i\alpha) + \exp(-i\alpha) = 2 \cos \alpha$ .

Damit wird die untere runde Klammer in G (7.17) zu  $2 \cos \omega_d t$  mit

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (7.19)$$

als Frequenz der gedämpften Schwingung. Insgesamt erhalten wir

$$x = x_0 \exp[-D\omega_0 t] \times \cos(\sqrt{1 - D^2} \omega_0 t) = x_0 \exp[-\delta t] \times \cos(\omega_d t). \quad (7.20)$$

Das ist eine Schwingung mit der Frequenz  $\omega_d$ , deren Amplitude exponentiell mit der Zeitkonstante  $1/\delta$  abnimmt.

Der **Kriechfall** entspricht  $D > 1$ . Für  $D \gg 1$  geht  $x_-$  in G (7.18) gegen null und  $x_+$  gegen  $x_0$ . Wenn man aber  $(D - \sqrt{D^2 - 1})$  im Argument der Exponentialfunktion auch noch null setzt, bleibt nichts übrig. Deshalb wird die Wurzel in eine Reihe entwickelt. Wir formen um  $D - \sqrt{D^2 - 1} = D - D\sqrt{1 - 1/D^2}$ , setzen  $x = 1/D^2$  und verwenden  $\sqrt{1 - x} \approx 1 - x/2$ . Damit wird  $D - \sqrt{D^2 - 1} = 1/2D$ . Insgesamt erhalten wir damit aus G (7.17) für den Kriechfall

$$x = x_0 \exp\left[-\frac{\omega_0 t}{2D}\right] = x_0 \exp\left[-\frac{\omega_0^2 t}{2\delta}\right] = x_0 \exp\left[-\frac{ct}{b}\right], \quad (7.21)$$

also einen exponentiellen Abfall mit der Zeitkonstante  $b/c$ , d. h. Dämpfungskoeffizient durch elastische Konstante  $c$ .

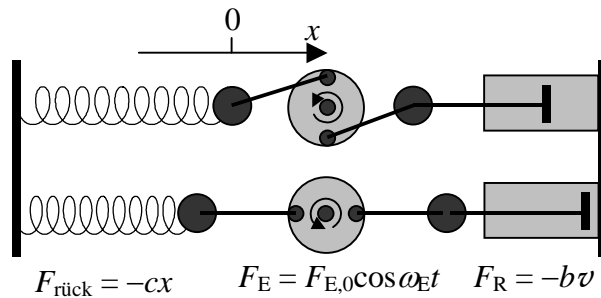
Der **aperiodische Grenzfall** entspricht  $D = 1$ . In diesem Fall verschwinden die Wurzeln aus der ersten Zeile von G (7.17) und wir haben gleiche Argumente in beiden Exponentialfunktionen. Damit können wir die Amplituden addieren ( $x_+ + x_- = x_0$ ) und umgehen so das Problem, dass die einzelnen Amplituden für  $D = 1$  eigentlich unendlich werden. Das Resultat ist

$$x = x_0 \exp[-\omega_0 t] = x_0 \exp[-\delta t]. \quad (7.22)$$

Dieser Grenzfall wird in vielen Situationen angestrebt. Nach einer elastischen Auslenkung wird der Ruhezustand schnellstmöglich erreicht, ohne dass das System durchschwingt.

## 7.4 Bewegungsgleichungen erzwungener Schwingungen

Wir betrachten reches System, bei dem eine Federkraft, eine periodische Kraft und eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit wirken:



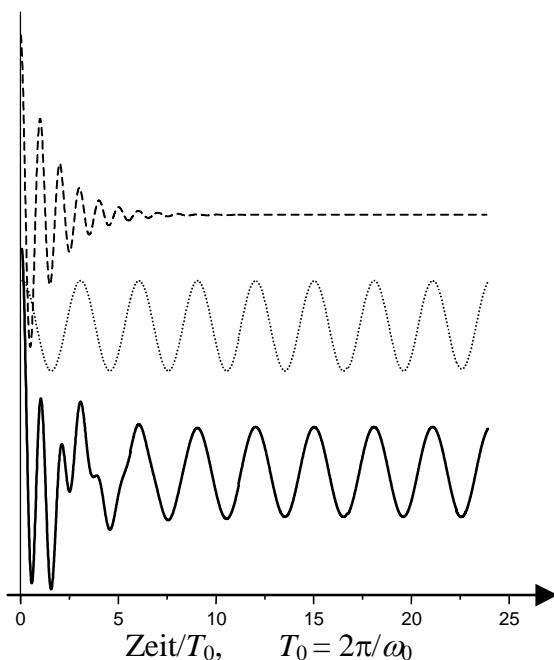
Zur Aufstellung der zugehörigen Differentialgleichung verwenden wir die für die *freie* gedämpfte Schwingung aufgestellte G (7.16) und ersetzen die null auf der rechten Seite durch den inhomogenen Term  $F_E/m$ . Damit erhalten wir eine inhomogene Differentialgleichung (lineare Gleichung zweiter Ordnung) in der Form

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{E,0}}{m} \cos \omega_E t. \quad (7.23)$$

Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung setzt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung und einer beliebigen die inhomogene Differentialgleichung befriedigenden speziellen (partikulären) Lösung zusammen:

$$x_{\text{inhomogen}} = x_{\text{homogen}} + x_{\text{partikulär}}. \quad (7.24)$$

Nach Abklingen der gedämpften Einschwingvorgänge hat eine erzwungene Schwingung die Anregungsfrequenz  $\omega_E$ . Bei Vorliegen der Anfangsbedingung  $x_{\text{part}} = x_E$  für  $t = 0$  ist sicher  $x_{\text{part}} = x_E \cos \omega_E t$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Als allgemeine Lösung verwenden wir G (7.20) und betrachten zur Veranschaulichung einen speziellen Fall, bei dem  $D = 0,1$ ,  $x_0 = 4x_E$  und  $\omega_0 = 3\omega_E$  sind.



Die gestrichelte Kurve der linksstehenden Abbildung oben zeigt die homogene Lösung. In der Mitte ist die partikuläre Lösung als gepunktete Linie. Die unten befindliche Summe der beiden Anteile zeigt, dass die Länge des Einschwingvorgangs von der Dauer des Ausschlingens der freien gedämpften Schwingung bestimmt wird.

Eine allgemeine Betrachtung beginnt mit einem komplexen Ansatz für die partikuläre Lösung:

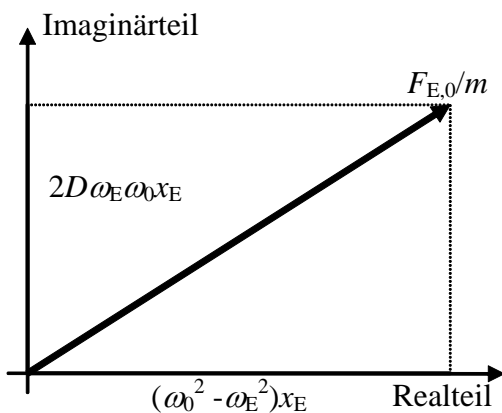
$$x_{\text{part}} = x_E \exp[i(\omega_E t - \gamma)], \quad (7.25)$$

wobei  $\gamma$  die Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Resonatorschwingung für  $t = 0$  bezeichnet. Als zugehörige komplexe Differentialgleichung wird G (7.23) modifiziert:

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{E,0}}{m} \exp(i\omega_E t). \quad (7.26)$$

Lösungsansatz (7.25) in Differentialgleichung (7.26) eingesetzt ergibt nach Differentiation, Division durch  $\exp[i\omega_E t]$  und Zusammenfassen des realen und des imaginären Anteils

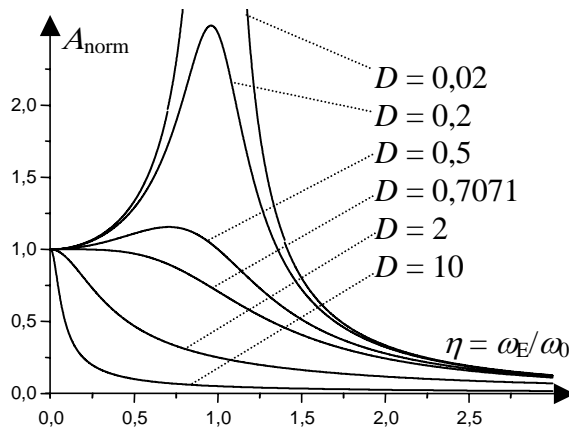
$$(\omega_0^2 - \omega_E^2)x_E + i2D\omega_0\omega_E x_E = \frac{F_{E,0}}{m} \exp(i\gamma) = \frac{F_{E,0}}{m} (\cos \gamma + i \sin \gamma). \quad (7.27)$$



G (7.27) gilt für Realteil und Imaginärteil getrennt. Damit gilt linksstehende Darstellung des Zeigers ( $F_{E,0}/m$ ) einer erzwungenen Schwingung. Der Betrag dieses Zeigers ist

$$\left(\frac{F_{E,0}}{m}\right)^2 = ((\omega_0^2 - \omega_E^2)x_E)^2 + (2D\omega_0\omega_E x_E)^2 \quad (7.28)$$

G (7.28) wird nach  $x_E$  aufgelöst und außerdem wird das Verhältnis  $\eta = \omega_E/\omega_0$  der Frequenzen von erzwungener zu freier Schwingung eingeführt.



Mit  $\omega_0^2 = c/m$  ist

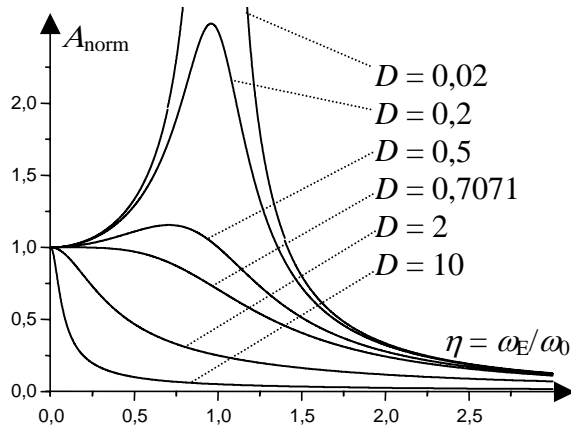
$$x_E = \frac{F_{E,0}}{c\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}. \quad (7.29)$$

Die normierte Amplitude  $A_{\text{norm}} = x_E c / F_{E,0}$  hängt nur noch von  $D$  und  $\eta$  ab. Die linke Abbildung zeigt einige Kurvenscharen. Für sehr kleine Anregungsfrequenzen im Vergleich zur Resonanzfrequenz ( $\eta \ll 1$ ) ist  $x_{E, \text{stat}} = F_{E,0}/c$  bzw.  $A_{\text{norm}} = 1$ . Die einwirkende

Kraft wirkt quasistatisch gegen die Federkraft. Für sehr große Anregungsfrequenzen ( $\eta \gg 1$ ) geht unabhängig von  $D$  die Amplitude gegen null. Deshalb werden zur Schalldämmung Materialien mit einer sehr niedrigen Eigen-Resonanz-Frequenz verwendet.

Der Resonanzfall ( $\eta = 1$ ) führt ohne Dämpfung zur Resonanzkatastrophe. Der Erreger pumpt phasengerecht ständig Energie in das schwingende System, das durch eine sehr große Schwingungsamplitude zerstört wird. Für den Resonanzfall mit Dämpfung verschiebt sich die Resonanzfrequenz, für die die Amplitude maximal bzw. der Nenner in G (7.29) minimal wird. Ableiten und Nullsetzen des Nenners führt zu den Beziehungen

$$\eta_{\text{res}} = \sqrt{1 - 2D^2}, \quad \omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}. \quad (7.30)$$



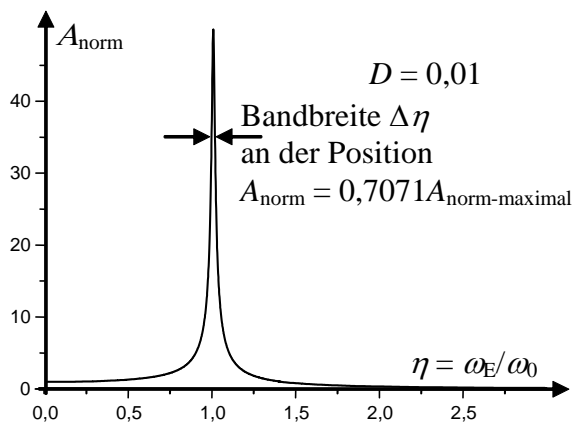
Mit steigendem Dämpfungsgrad verringern sich Resonanzfrequenzen und Amplituden. Eine Amplitudenüberhöhung findet nur bis zur Grenzdämpfung  $D = 1/\sqrt{2} \approx 0,7071$  statt, für die Wurzel in G (7.30) noch reell ist.

G (7.30) in G (7.29) eingesetzt ergibt die Größe der Amplitude im Resonanzfall:

$$x_{E,\text{res}} = \frac{F_{E,0}}{c2D\sqrt{1-D^2}}. \quad (7.31)$$

Der Vergleich diese Größe mit dem oben betrachteten quasistatischen Fall (sehr kleine Anregungsfrequenz)  $x_{E,\text{stat}} = F_{E,0}/c$  ergibt

$$\frac{x_{E,\text{res}}}{x_{E,\text{stat}}} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \approx \frac{1}{2D} = Q. \quad (7.32)$$



Die rechte Seite von G (7.32) gilt für kleine Werte von  $D$ . Die Güte  $Q$  eines Schwingkreises nimmt mit steigender Resonanzüberhöhung zu. Mechanische Filter der Elektrotechnik (Piezo-Quarz) erreichen Güten in der Größenordnung von 10 000 – 100 000.

Benutzt man nun die Aussage aus der normierten Amplitudenfunktion, vgl. G (7.29) sowie die neben dieser Gleichung und die hier links stehende Abbildung, dass für die Bandbreiten der Resonanzkurven

$$\Delta\eta \approx 4D = \frac{2}{Q} \quad (7.33)$$

gilt, ergibt sich beispielsweise für eine Güte  $Q = 1\,000$  und eine Resonanzfrequenz von 10 MHz eine Bandbreite von 20 kHz. (Beachte: Bandbreiten sind Halbwertsbreiten in den Leistungskurven, die das Quadrat der Amplitudenfunktionen darstellen. Deshalb wird in den Amplitudenkurven an der Position des Abfalls auf  $1/\sqrt{2} \approx 0,7071$  des Maximalwertes der Kurve gemessen.)

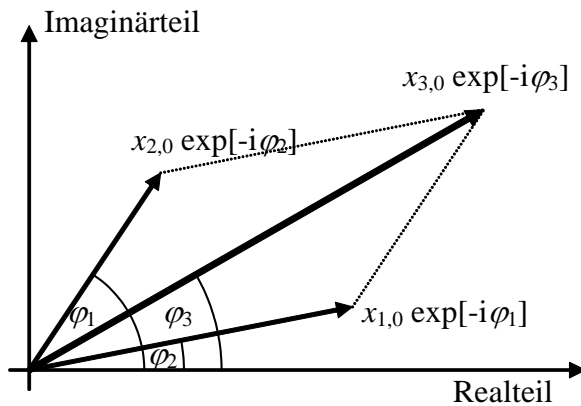


## 7.5 Überlagerung von Schwingungen bei gleicher Frequenz und unterschiedlicher Phase

Betrachte die Addition zweier Funktionen:

$$x_1 = x_{1,0} \cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow x_1 = x_{1,0} \exp[i(\omega t + \varphi_1)] = x_{1,0} \exp[i\varphi_1] \exp[i\omega t] \text{ und}$$

$$x_2 = x_{2,0} \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow x_2 = x_{2,0} \exp[i(\omega t + \varphi_2)] = x_{2,0} \exp[i\varphi_2] \exp[i\omega t].$$



Der Übergang zur komplexen Darstellung erlaubt die Addition der komplexen Amplituden  $x_{1,0} \exp[i\varphi_1]$  und  $x_{2,0} \exp[i\varphi_2]$ , die die Phasen enthalten, auf der Gauß'schen Zahlenebene. Die resultierende komplexe Amplitude ist  $x_{3,0} \exp[i\varphi_3]$ . Man sieht sofort, dass sich zwei Signale gleicher Amplitude und um  $180^\circ$  verschobener Phase auslöschen. Die numerische Vektoraddition erfordert die Verwendung der Additionstheoreme. Es ergibt sich

$$x_{3,0} = \sqrt{x_{1,0}^2 + 2x_{1,0}x_{2,0} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + x_{2,0}^2} \quad \text{und} \quad (7.34)$$

$$\tan \varphi_3 = \frac{x_{1,0} \sin \varphi_1 + x_{2,0} \sin \varphi_2}{x_{1,0} \cos \varphi_1 + x_{2,0} \cos \varphi_2}.$$

## 7.6 Überlagerung von Schwingungen unterschiedlicher Frequenz

Eine "reine" Schwebung entsteht, wenn man zwei Schwingungen mit gleicher Amplitude und wenig unterschiedlicher Frequenz addiert. Grundlage ist das Additionstheorem

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (7.35)$$

Durch Addition von  $x_1 = x_0 \cos(\omega_1 t)$  und  $x_2 = x_0 \cos(\omega_2 t)$  erhält man

$$x_3 = x_1 + x_2 = 2 \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right). \quad (7.36)$$

Für  $\omega_1 \approx \omega_2$  enthält der erste Faktor die Grundfrequenz  $(\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega_1 \approx \omega_2$  und der zweite Faktor mit  $(\omega_1 - \omega_2)/2$  die deutlich geringere Schwebungsfrequenz. Haben die Schwingungsdauern der Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die Werte  $T_1$  und  $T_2$ , ergeben sich  $T_{\text{Schwebung}} = T_1 T_2 / (T_1 - T_2)$  und  $T_{\text{Grund}} = T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$ , vgl. Abbildung auf der nächsten Seite.

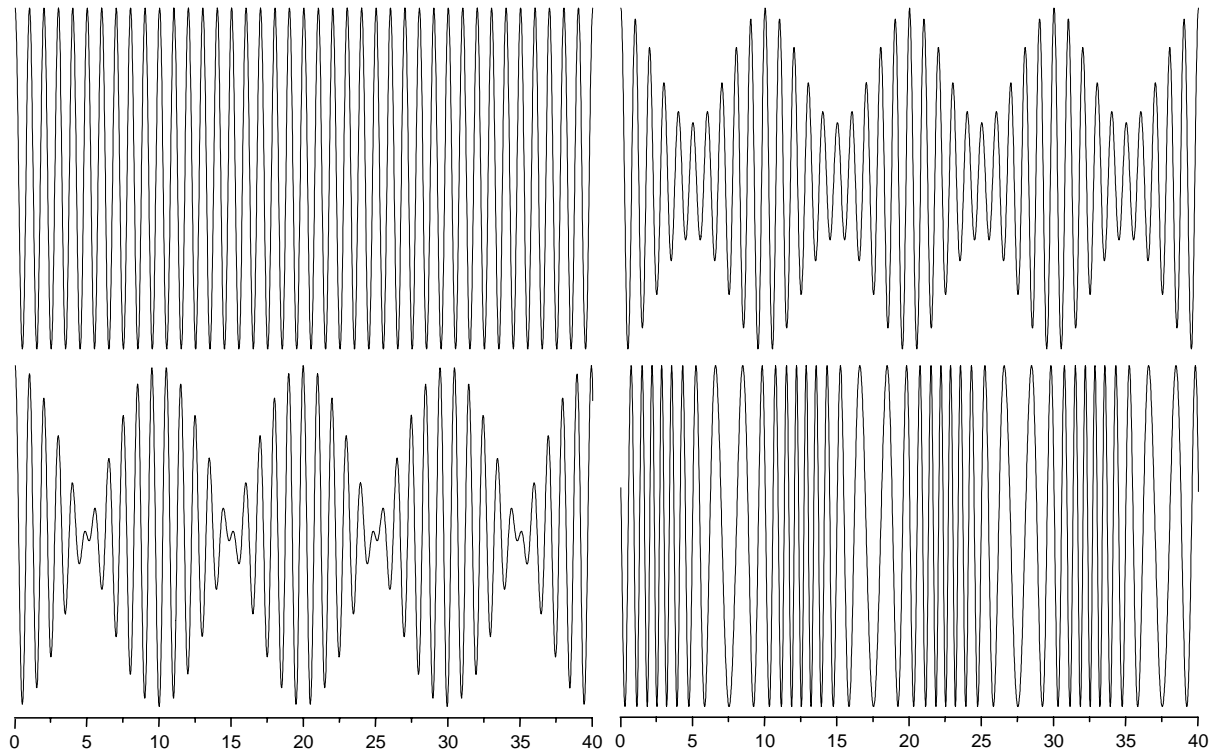
Modulation hat nichts mit der Addition von Frequenzen zu tun. Es wird gewöhnlich eine niedrigere Modulationsfrequenz  $\omega_M$  auf die Amplitude oder Frequenz einer wesentlich höheren Trägerfrequenz  $\omega_T$  aufmoduliert. Eine Amplitudenmodulation hat die Form

$$x = (x_T + x_M \cos \omega_M t) \cos \omega_T t, \quad (7.37)$$

wobei  $x_T$  und  $x_M$  Amplituden des Trägers und der Modulation darstellen. Ist bei einer hochfrequenten Schwingung die Momentanfrequenz  $\omega$  durch  $\omega = \omega_T + h_M \sin \omega_M t$  moduliert ( $h_M/\omega_T$  ist der relative Modulationshub), liefert das zeitliche Integral die Momentanphase  $\omega_T t - (h_M/\omega_M) \cos \omega_M t$ . Deshalb wird eine Frequenzmodulation durch folgende Gleichung beschrieben:

$$x = x_T \cos[(\omega_T t - (h_M/\omega_M) \cos \omega_M t)]. \quad (7.38)$$

Bei einer Phasenmodulation gilt ebenfalls G (7.38), wobei  $h_M/\omega_M$  durch den Phasenhub zu ersetzen ist.



Die Abbildung zeigt links oben 40 Perioden einer Cosinus-Funktion mit der Frequenz  $\omega_T$ . Darunter ist die Überlagerung zweier amplitudengleicher Schwingungen dargestellt, deren Frequenzen  $0,95 \omega_T$  und  $1,05 \omega_T$  sind. Rechts oben ist die Amplitudenmodulation mit einem Modulationsgrad von 50 % dargestellt, wobei  $\omega_M = \omega_T/10$  gilt. Gleiches gilt für die rechts unten dargestellte Frequenzmodulation, für die der relative Modulationshub  $h_M/\omega_T$  mit 50 % sehr hoch gewählt wurde, um den Effekt erkennbar zu machen.

## 7.7 Fourier-Analyse überlagerter Schwingungen

Jean Baptiste Joseph Fourier hat die nach ihm benannte Transformation in ihrer ursprünglichen Form 1822 zur Beschreibung der räumlichen Verteilung der Temperatur vorgestellt. Gegenwärtig dient sie allgemein zur Transformation einer periodischen (oder periodisch gemachten) Funktion aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich und umgekehrt. Die symmetrische Form der Fourier-Transformation enthält jeweils Realteil und Imaginärteil:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (7.39)$$

und

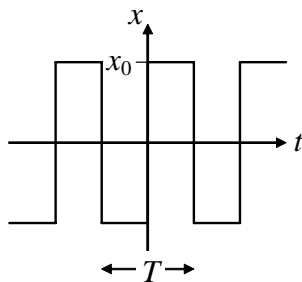
$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (7.40)$$

Anschaulicher sind die von Fourier eingeführten Summen, womit ein periodisches Muster (Periodendauer  $T$ ) eindeutig in eine Reihe von Sinus- und Cosinus-Funktionen von ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingung ( $\nu_{\text{Grundschwingung}} = 1/T$ ) zerlegen lässt:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]. \quad (7.41)$$

Die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  können definiert werden als

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(k\omega t) dt \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.42)$$



Mit Definition (7.42) sieht man leicht, dass für eine Rechteckfunktion mit der Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$  die Cosinus-Koeffizienten null sind, die geraden Sinus-Koeffizienten null sind und für die ungeraden Sinus-Koeffizienten  $b_k = 1/k$  gilt.

$$x(t) = \frac{4x_0}{\pi} + \left[ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right]. \quad (7.43)$$

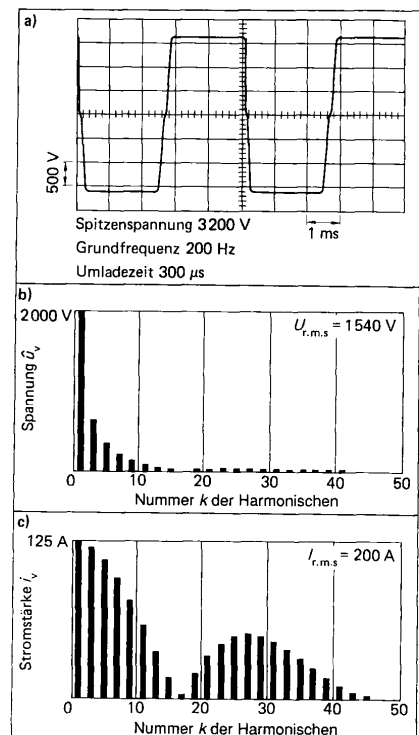


Bild 5-38. Fourier-Analyse des Spannungsverlaufs bei einem Kommutierungskondensator.