

6 Mechanik deformierbarer Körper

6.1 Deformierbarer fester Körper

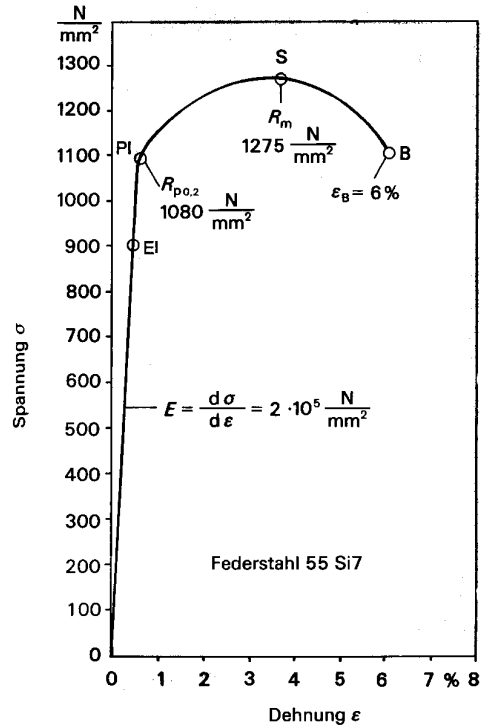
Rechtsstehende Abbildung (Bild 2-85 HMS) zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Federstahls, wobei die relative Dehnung ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (6.01)$$

über der Normalspannung σ

$$\sigma = \frac{dF_{\text{normal}}}{dA} \quad (6.02)$$

aufgetragen ist. Bei Dehnung bis zum Punkt "EI" ist es eine elastische Verformung, die nach Entlastung zurückgeht. Bis "PI" folgt der elastisch-plastische Bereich, bei dem die Dehnung nach Entlastung nicht vollständig zurückgeht. Im folgenden plastischen Bereich bis "S" bleibt die Verformung nach Entlastung weitestgehend erhalten. Am Punkt "B" bricht das Material. Wir behandeln in diesem Kapitel 6.1 weiter nur elastische Verformungen.



Wird die Kraft nicht senkrecht (normal) sondern tangential zu einer Fläche ausgeübt, verursacht die Schubspannung τ

$$\tau = \frac{dF_{\text{tangential}}}{dA} \quad (6.03)$$

eine Schiebung (Scherung) eines rechten Winkels am Körper um den Scherwinkel γ . Die elastischen Verformungen sind in folgender Abbildung (Bild 2-80 HMS) enthalten.

Verformungsart	Dehnung	Querdehnung	allseitige Kompression	Scherung
Kenngröße	Elastizitätsmodul E	Querdehnungszahl oder Poisson-Zahl μ	Kompressionsmodul K	Schubmodul (Torsionsmodul) G
Skizze				
Gesetzmäßigkeit	$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$ $\sigma = E \varepsilon$ (Hookesches Gesetz)	$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}$ $\varepsilon_u = -\mu \varepsilon$ $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon (1 - 2\mu)$ $0 < \mu < 0,5$	$\frac{\Delta V}{V} = 3 \varepsilon (1 - 2\mu)$ $-\frac{\Delta p}{\Delta V} = K$ $\frac{1}{K} = \kappa$	$\tau = \frac{F_t}{A} = G \gamma$
Zusammenhang			$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$	$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$; $\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$

Der Elastizitätsmodul E wird mit der Normalspannung σ aus G (6.02) und der Dehnung ε aus G (6.01) als Proportionalitätskonstante des Hooke-Gesetzes definiert:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6.04)$$

Die Querdehnung ε_q wird in Unterschied zur Längendehnung ε , vgl. G (6.01) als relative Dickenänderung (z. B. Änderung des Durchmessers eines Zylinders oder der Dicke eines Stabes mit quadratischem Querschnitt) definiert:

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}. \quad (6.05)$$

Zwischen Querdehnung und Längendehnung besteht der Zusammenhang

$$\varepsilon_q = -\mu \varepsilon. \quad (6.06)$$

Der Proportionalitätsfaktor μ wird als Poisson-Zahl oder Querdehnungszahl bezeichnet. Die Änderung des Volumens eines Körpers unter dem Einfluss einer Dehnung *in einer Richtung* lässt sich mit Hilfe von G (6.01), (6.05) und (6.06) als

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu) \quad (6.07)$$

berechnen. Für positives ε sollte ΔV positiv sein. Dann muss nach G (6.07) auch $1 - 2\mu$ positiv sein, und es ergibt sich $0 < \mu \leq 0,5$. Tritt die Dehnung oder eine Kompression jedoch *allseitig in drei Richtungen* auf, verdreifacht sich der Effekt der Volumenänderung, und man erhält anstelle von G (6.07)

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon(1 - 2\mu). \quad (6.08)$$

Anstelle der Zugspannung σ verwendet man die Druckänderung Δp mit

$$\Delta p = -\sigma. \quad (6.09)$$

Als Kompressionsmodul definiert man

$$K = -\frac{\Delta p V}{\Delta V} \quad (6.10)$$

und erhält dann aus den G (6.04), (6.09) und (6.10) einen Zusammenhang zwischen Kompressionsmodul, Elastizitätsmodul und Poisson-Zahl:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (6.11)$$

Als Kompressibilität κ (kappa, in älterer Literatur ist dieser griechische Buchstabe oft als \varkappa gedruckt), bezeichnet man die relative Volumenänderung $\Delta V/V$ eines Körpers bei einer isotropen Druckänderung Δp . Es gilt

$$\kappa = -\frac{\Delta V/V}{\Delta p} = \frac{1}{K}. \quad (6.12)$$

Eine Querkraft (Schubkraft), die parallel (tangential) zur Oberfläche eines Körpers wirkt, verursacht eine Scherung um den Scherwinkel γ , vgl. G (6.03). Analog zum Hooke'schen Gesetz der Dehnung gilt für die Scherung

$$\tau = G \gamma, \quad (6.13)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor G den Schubmodul bezeichnet. Zwischen der durch G charakterisierten Gestaltelastizität des Körpers, dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnungszahl μ besteht folgende Beziehung:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (6.14)$$

Mit $0 < \mu \leq 0,5$ folgt aus G (6.14)

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}. \quad (6.15)$$

Man beachte, dass die Gleichungen (6.01) bis (6.15) hier nur für isotrope Eigenschaften fester Körper hergeleitet worden sind. Anisotrope Eigenschaften erfordern spezielle Betrachtungen für jede der drei Richtungen, die z. B. den Kristallachsen von Einkristallen entsprechen.

Einige Verformungskonstanten von Werkstoffen enthält folgende Tabelle (Tab. 2-8 HMS)

Werkstoff	Elastizitäts-Modul E in GN/m ²	Querdehnungszahl μ	Kompressions-Modul K in GN/m ²	Schub-Modul G in GN/m ²	Bruchdehnung ϵ_B	Zug- bzw. Druckfestigkeit σ_B in GN/m ²
Eis	9,9	0,33	10	3,7		
Blei	17	0,44	44	5,5 bis 7,5		0,014
Al (rein)	72	0,34	75	27	0,5	0,013
Glas	76	0,17	38	33		0,09
Gold	81	0,42	180	28	0,5	0,14
Messing (kaltverf.)	100	0,38	125	36	0,05	0,55
Kupfer (kaltverf.)	126	0,35	140	47	0,02	0,45
V2A-Stahl	195	0,28	170	80	0,45	0,7

6.2 Volumeneffekte in ruhenden Flüssigkeiten und Gasen

Die wichtigste Größe der Hydrostatik (bzw. Aerostatik) ist der Druck. Er ist als Skalar durch

$$dF = p \, dA \quad (6.16)$$

definiert, wobei dF die Kraft ist, die senkrecht auf ein Flächenelement dA einer Begrenzungsfläche wirkt. Kraftvektor und Flächenvektor haben gleiche Richtung und vereinfacht kann man Druck ist Kraft durch Fläche bzw. $p = F/A$ schreiben.

Die SI-Einheit des Drucks ist N m^{-2} und hat die Bezeichnung Pascal (Pa). Zum Gebrauch zusammen mit SI-Einheiten ist das "bar" zugelassen. Es gilt, dass $1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$ etwa dem Luftdruck auf der Erde entspricht. Nicht mehr zugelassen ist die mit 1 kp cm^{-2} definierte "Technische Atmosphäre" $1 \text{ at} = 1 \text{ kp cm}^{-2} = 98,1 \text{ kPa} = 0,981 \text{ bar}$. Die "Physikalische Atmosphäre" $1 \text{ Atm} = 1 \text{ atm} = 1,01325 \text{ bar}$ ist als "mittlerer Luftdruck" (*standard atmosphere*) noch Bestandteil der Konvention über den Standardzustand eines Stoffes in der physikalischen Chemie:

- Zustand des reinen Stoffes bei Normaldruck von 1 atm ($101,325 \text{ kPa} = 1,01325 \text{ bar}$) und der Temperatur von $25 \text{ }^\circ\text{C}$ ($298,15 \text{ K}$), wobei Gase sich ideal verhalten sollen.

In Technik und Physik wird für Gase jedoch oft der Normalzustand verwendet, d. h. der

- Zustand eines Gases bei Normaldruck von 1 atm ($101,325 \text{ kPa} = 1,01325 \text{ bar}$) und der Temperatur von $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ($273,15 \text{ K}$).

Man beachte, dass oft (z. B. bei Reifen) der Druck als Überdruck gegenüber dem Standard-Luftdruck angegeben wird, eine entsprechende veraltete Einheit ist "atü".

Die Kompressibilität κ ist bereits in G (6.12) eingeführt worden. Es gilt für eine isotherme (T konstant) differentielle Volumenänderung

$$\frac{dV}{V} = -\kappa_T \, dp, \quad (6.17)$$

wobei die Kompressibilität von Flüssigkeiten wie bei festen Körpern sehr gering ist. In der technischen Hydraulik nutzen Kraft- oder Druckwandler die weitestgehende Inkompressibilität von Flüssigkeiten. Gase sind hingegen sehr kompressibel. Für ideale Gase gilt

$$p \, V_m = R \, T, \quad (6.18)$$

wobei das Volumen V_m auf ein Mol der Substanz bezogen ist. Für n Mole gilt $V_m = V/n$. Die Gaskonstante hat den Wert $R = 8,314510(70) \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ und T ist die absolute Temperatur. Mit der Ableitung dV/dp aus G (6.18) und Vergleich mit G (6.17) erhalten wir

$$\kappa_T^{\text{ideales Gas}} = 1/p. \quad (6.19)$$

Für die isobare (p konstant) Volumenausdehnung bei Temperaturänderung gilt allgemein

$$\frac{dV}{V} = \beta_p \, dT. \quad (6.20)$$

Durch Vergleich mit der entsprechenden Ableitung der G (6.18) folgt für den isobaren Volumenausdehnungskoeffizienten eines idealen Gases

$$\beta_p^{\text{ideales Gas}} = 1/T. \quad (6.21)$$

Ein Schweredruck entsteht durch die Gewichtskraft von Molekülen in tieferen Schichten einer Flüssigkeit oder eines Gases. Allgemein gilt bei der Schwerebeschleunigung g , einer Dichte ρ und einer nach unten gerichteten Koordinate y

$$dp = \rho g dy. \quad (6.22)$$

Für wenig kompressible Flüssigkeiten hängt ρ nicht von y ab, und es ergibt sich als Ergebnis der Integration von G (6.22) der hydrostatische Druck in der Tiefe y als

$$p_{\text{hydro}} = p_a + \rho g y. \quad (6.23)$$

Dabei bezeichnet p_a den Außendruck in der Tiefe $y = 0$. Mit $\rho \approx 1 \text{ kg L}^{-1}$ ergibt sich in Wasser eine Druckzunahme von etwa 1 bar pro 10 m Wassertiefe.

Gase werden jedoch durch Druckzunahme stark komprimiert. Betrachtet man ein mol eines Gases, z. B. etwa 28 g molekularen Stickstoffs (N_2), erhält man die Dichte durch Division durch das Molvolumen V_m aus G (6.18). Unter Voraussetzung konstanter Temperatur ergibt sich dann durch Verwendung von G (6.16)

$$\rho/\rho_0 = p/p_0, \quad (6.24)$$

wobei ρ_0 und p_0 die Dichte und der Druck unter Normalbedingungen [zwischen G (6.16) und (6.17) definiert] sind. Aus G (6.24) ergibt sich $p = p_0 \rho/\rho_0$, aus G (6.22) folgt durch Differentiation, wenn die Tiefe y durch die Höhe $-h$ ersetzt wird, $dp = -\rho g dh$. Aus Integration von dp/p folgt dann

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \int_0^h dh \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g h}{p_0} \quad (6.25)$$

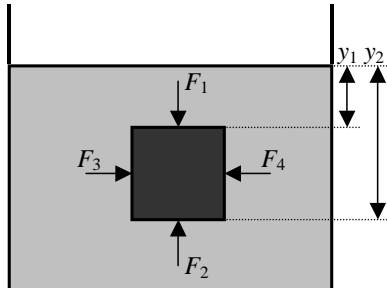
bzw.

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right) \quad \text{und} \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right). \quad (6.26)$$

Letzteres ist die barometrische Höhenformel. Luft hat nach DIN 5450 eine Normaldichte von $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$. Mit $p_0 = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ und $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ergibt sich als Exponent der barometrischen Höhenformel $1,256 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Damit reduzieren sich Druck und Dichte in einer Höhe von 12560 m auf das 1/e-fache des Normalwerts. Die sogenannte "internationale Höhenformel" berücksichtigt die Temperaturabnahme mit zunehmender Höhe. Sie gilt bis zu einer Höhe von 11 km:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{6,5 h}{288 \text{ km}}\right)^{5,255}. \quad (6.27)$$

Der Auftrieb ist eine auf einen festen Körper der Schwerkraft entgegengerichtete Kraft, die dadurch entsteht, dass der auf die untere Fläche des Körpers (der in einer Flüssigkeit oder einem Gas eingetaucht ist) ausgeübte Schweredruck (der Flüssigkeit oder des Gases) größer ist als der auf die obere Fläche ausgeübte Druck. Die untenstehende Abbildung zeigt einen Würfel mit den Kantenlängen Δ (Flächen Δ^2 , Volumen Δ^3), d. h. $y_2 - y_1 = \Delta$. Die Seitenkräfte (hier nur eingezeichnet F_3 und F_4) heben sich gegenseitig auf. Dichte und Masse der verdrängten Flüssigkeit sind $\rho_{\text{flüss.}}$ und $m_{\text{flüss. verdrängt}} = \rho_{\text{flüss.}} V_{\text{flüss. verdrängt}}$. Man beachte, dass das Volumen des festen Körpers und der verdrängten Flüssigkeit gleich sind: $V_{\text{fest}} = V_{\text{flüss. verdrängt}}$.

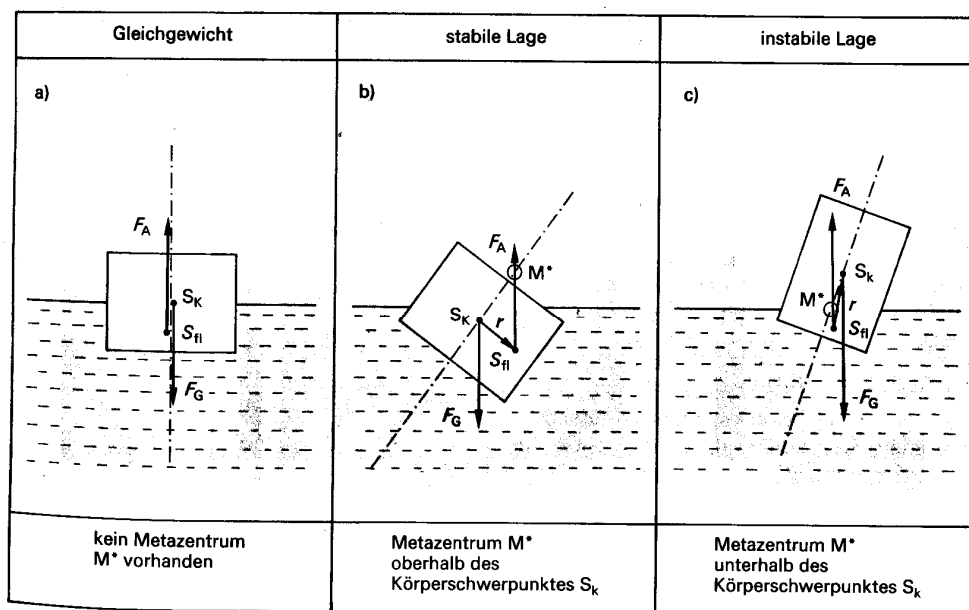


Damit ergibt sich für die Auftriebskraft mit Hilfe von G (6.23)

$$\begin{aligned}
 F_A &= F_2 - F_1 = \Delta^2(p_2 - p_1) \\
 &= \Delta^2 \rho_{\text{flüss.}} g (y_2 - y_1) \\
 &= \Delta^3 \rho_{\text{flüss.}} g \\
 &= V_{\text{fest}} \rho_{\text{flüss.}} g \\
 &= V_{\text{flüss. verdrängt}} \rho_{\text{flüss.}} g \\
 &= m_{\text{flüss. verdrängt}} g.
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

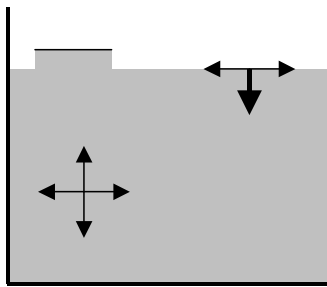
Die Auftriebskraft des Körpers entspricht also der Gewichtskraft $m_{\text{flüss. verdrängt}} g$ der verdrängten Flüssigkeit. Dieses für einen Würfel hergeleitete Ergebnis gilt für beliebige Körper, die man sich aus vielen differentiell kleinen Würfeln zusammengesetzt vorstellen kann. Aus G (6.28) folgt auch, dass ein Körper schwimmt, schwebt oder sinkt, wenn seine Masse (Gewichtskraft) kleiner, gleich oder größer als die Masse (Gewichtskraft) der verdrängten Flüssigkeit ist.

Bei schwimmenden Körpern ergeben sich Stabilitätsprobleme aus dem Sachverhalt, dass der Schwerpunkt, an denen die jeweiligen Kräfte angreifen, für Körper und verdrängte Flüssigkeit unterschiedlich sind. Die Auftriebskraft F_A greift am Schwerpunkt S_{fl} der verdrängten Flüssigkeit und die Schwerkraft F_G am Schwerpunkt S_K des Körpers an. Als Metazentrum M^* bezeichnet man den Schnittpunkt zwischen Mittelebene des Körpers (für betrachtete Drehung) und Auftriebskraft F_A . Liegt M^* unter S_K , ist die Lage instabil. Siehe Bild 2-97 aus HMS unten.



6.3 Grenzflächeneffekte

Bei idealen Gasen kann die Wechselwirkung zwischen den Atomen bzw. Molekülen vernachlässigt werden. In kondensierter Materie sind jedoch solche Wechselwirkungskräfte stärker als die Gravitationskräfte auf der Erde. Wir betrachten nur die sogenannten van der Waals-Kräfte (genauer London'sche Dispersionskräfte), die bei Molekülen ohne permanentes Dipolmoment durch kurzzeitige Schwankungen der Elektronendichte (temporäre Dipolmomente) in kondensierter Materie entstehen. Wasserstoffbrückenbindungen werden mit einbezogen (flüssiges Wasser). Von Kohäsionskräften spricht man zwischen gleichen Teilchen. Adhäsionskräfte treten zwischen Festkörperoberflächen und zwischen einer Festkörperoberfläche und den Molekülen einer Flüssigkeit auf. Adsorption ist die Anlagerung von Gasmolekülen an eine Festkörperoberfläche.



Oberflächenspannung entsteht an der Flüssig/Gas-Grenzfläche. Die Kohäsionskräfte heben sich zwar im Innern der Flüssigkeit auf, ergeben aber an der Oberfläche eine resultierende Kraft, siehe linke Abbildung. Will man Moleküle gegen diese ins Innere der Flüssigkeit gerichtete Kraft an die Oberfläche A bringen, muss eine Arbeit W verrichtet werden, die in eine Oberflächenenergie (potentielle Energie) umgewandelt wird. Als Oberflächenspannung σ definiert man

$$\sigma = \frac{dW}{dA} . \quad (6.29)$$

Zur Veranschaulichung der Oberflächenspannung mit der Dimension $\text{J m}^{-2} = \text{N m}^{-1}$ legen wir eine gewichtsloses Streichholz der Länge l auf die Wasseroberfläche obiger Abbildung und heben es mit der Kraft F um die Länge Δs an. Damit vergrößert sich die Oberfläche um $\Delta A = 2l\Delta s$ und es gilt

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F\Delta s}{2l\Delta s} = \frac{F}{2l} . \quad (6.30)$$

$2l$ ist die gesamte Randlänge des Streichholzes (Durchmesser vernachlässigt) und die Oberflächenspannung σ ergibt sich damit als Kraft pro Randlänge. Bei 18°C gemessene Oberflächenspannungen/ N m^{-1} gegenüber Luft sind z. B. 0,471 für Quecksilber, 0,073 für Wasser und 0,017 für Diethylether.

Kapillarität ist eine Eigenschaft der Grenzfläche zwischen Gas (1), Flüssigkeit (2) und Festkörper (3). Zur bisher eingeführten Oberflächenspannung Gas-Flüssigkeit (σ_{12}) kommen die Oberflächenspannung Gas-Festkörper (σ_{13}) und die Oberflächenspannung Flüssigkeit-Festkörper (σ_{23}) hinzu. Beim Extremfall der vollkommenen Benetzung sind die Adhäsionskräfte wesentlich größer als die Kohäsionskräfte, und die Flüssigkeit breitet sich bis zur Ausbildung einer Monoschicht auf der Festkörperoberfläche aus. In diesem Fall ist die für die Adsorption wirksame Haftspannung $\sigma_{13} - \sigma_{23}$ gleich oder größer als die Oberflächenspannung Gas-Flüssigkeit σ_{12} . Bei kleiner Benetzung sind die Adhäsionskräfte kleiner als die Kohäsionskräfte, und die Flüssigkeit bildet einen Tropfen auf der Festkörperoberfläche. An der Grenzlinie Gas-Flüssigkeit-Festkörper, vgl. Bild 2-200 HMS in Abbildung unten, muss die Horizontalkraft verschwinden, und es gilt mit dem Grenzwinkel α

$$\sigma_{12} \cos \alpha = \sigma_{13} - \sigma_{23} . \quad (6.31)$$

Der im oberen Teil der Abbildung unten eingeführte Grenzwinkel kann auch als Grenzwinkel zwischen Flüssigkeit und Kapillarwand im unteren Teil der Abbildung eingetragen werden. Man spricht von Benetzung im Bereich $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (z. B. Wasser/Glas) und von keiner Benetzung $\pi/2 < \alpha \leq \pi$. Im ersten Fall tritt eine kapillare Hebung oder Kapillaraszension und im zweiten eine kapillare Senkung oder Kapillardepression auf.

Benetzungsform	Benetzung	keine Benetzung
Ursache	Adhäsionskräfte \gg Kohäsionskräfte	Adhäsionskräfte \ll Kohäsionskräfte
Wirkung	Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Oberfläche des festen Körpers	Flüssigkeit zieht sich tropfenförmig zusammen
Skizze (Die Pfeile symbolisieren die aufgrund der Grenzflächenspannungen auftretenden Kräfte)		
Gleichung	$\sigma_{12} \cos \alpha = \sigma_{13} - \sigma_{23}$	
Randwinkel	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$
Kapillarität	<p style="text-align: center;">Kapillaraszension</p>	<p style="text-align: center;">Kapillardepression</p>

Bei der kapillaren Hebung (Senkung) ergibt sich die Höhe h der Flüssigkeit in der Kapillare (Radius r) aus dem Gleichgewicht der Kraft $F_{\sigma_{\perp}}$, die von der senkrechten Oberflächenspannungskomponente $\sigma_{12} \cos \alpha$ ausgeht, mit der Gewichtskraft F_G der Differenz der Flüssigkeitssäule. Es gilt mit Randlänge l , Differenzmasse Δm , Differenzvolumen ΔV und Dichte ρ

$$l \sigma_{12} \cos \alpha = 2 \pi r \sigma_{12} \cos \alpha = F_{\sigma_{\perp}} = F_G = \Delta m g = \Delta V \rho g = r^2 \pi h \rho g. \quad (6.32)$$

Daraus folgt für die relative Höhe der Flüssigkeit in der Kapillare ein positiver bzw. negativer Wert für Kapillaraszension bzw. Kapillardepression:

$$h = \frac{2 \sigma_{12} \cos \alpha}{\rho g r}. \quad (6.33)$$

In benetzenden porösen Körpern (Mauersteine, Pflanzenfasern) steigen Flüssigkeiten umso höher, je geringer der Radius der Poren ist.

6.4 Reibungsfrei strömende Flüssigkeiten und Gase

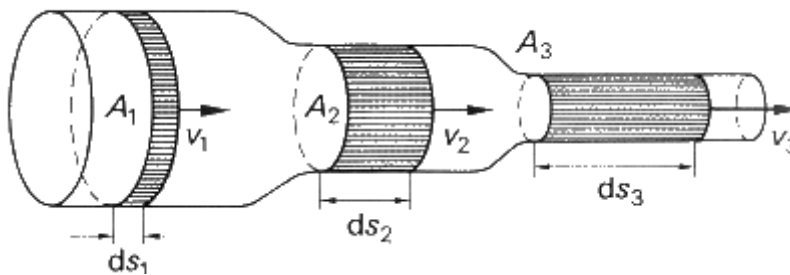
Nur ideale Gase und inkompressible Flüssigkeiten strömen reibungsfrei. Die Strömungen realer Gase und Flüssigkeiten erfordern eine Betrachtung des Reibungswiderstands, der in diesem Kapitel vernachlässigt wird.

Gibt es in einer Strömung weder Quellen (Massengewinn) noch Senken (Massenverlust), dann gilt für eine Strömung mit der Geschwindigkeit \boldsymbol{v} durch eine Fläche mit dem Flächenvektor \boldsymbol{A} die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{dm}{dt} = \rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{A} = \text{konstant.} \quad (6.34)$$

Dabei bezeichnen m die Masse und ρ die Dichte des strömenden Mediums. Sind Druckunterschiede vernachlässigbar oder handelt es sich um inkompressible Flüssigkeiten, vereinfacht sich G (6.34) weiter zu der Aussage, dass der Volumenstrom konstant ist:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \boldsymbol{v} \boldsymbol{A} = \text{konstant.} \quad (6.35)$$



Das veranschaulicht das linksstehende Bild (2-106 HMS).

Um ein Flüssigkeitsvolumen $dV_1 = A_1 ds_1$ gegen einen Druck p_1 durch die Querschnittsfläche A_1 in die Strömungsröhre einzubringen, muss die Arbeit $dW_1 = p_1 dV_1 = p_1 A_1 ds_1$ aufgewendet werden. Diese Arbeit kann an der Position 2 z.B. durch eine Kolbenverschiebung geleistet werden, wobei $dW_2 = p_2 dV_2$ gilt. Die Differenz zwischen aufgewendeter und geleisteter Arbeit ist dann $dW = dW_1 - dW_2 = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = (p_1 - p_2) dV$. Letzteres Gleichheitszeichen gilt, da der Volumenstrom einer inkompressiblen Flüssigkeit konstant ist, vgl. G (6.35).

Mit $dW = (p_1 - p_2) dV$ ist nur die Energiedifferenz infolge des statischen Drucks aufgeschrieben. Hinzu kommen an der Stelle i ($=1, 2$) Anteile potentieller Energie aus dem geodätischen Druck in der Höhe h_i mit $dW_{\text{pot}} = \rho dV g h_i$ und Anteile kinetischer Energie infolge der Geschwindigkeit v_i mit $dW_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho dV v_i^2$. Bildet man dW/dV und summiert alle Anteile, dann erhält man

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (6.36)$$

oder in allgemeiner Form die Bernoulli-Gleichung

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = p_{\text{gesamt}} = \text{konst.} \quad (6.37)$$

Aus der Bernoulli-Gleichung lassen sich viele Effekte erklären. Zerstäuber, die Wasserstrahlpumpe, das Hydrodynamische Paradoxon und Magnus-Effekt beruhen darauf, dass bei Erhöhung der Geschwindigkeit und konstantem geodätischen Druck der statische Druck abnimmt.

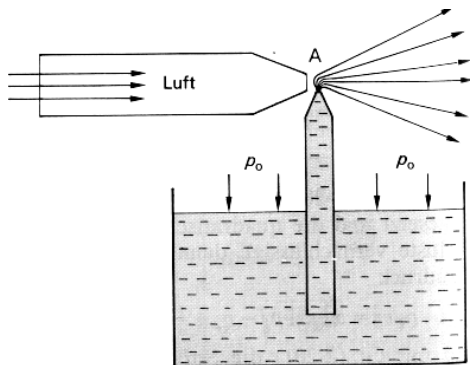


Bild 2-112. Prinzip des Zerstäubers.

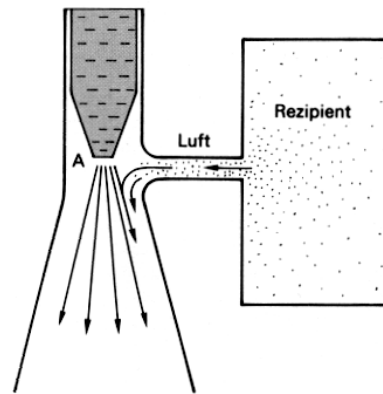


Bild 2-113. Prinzip der Wasserstrahlpumpe.

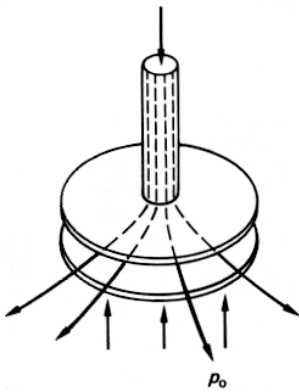


Bild 2-114. Hydrodynamisches Paradoxon.

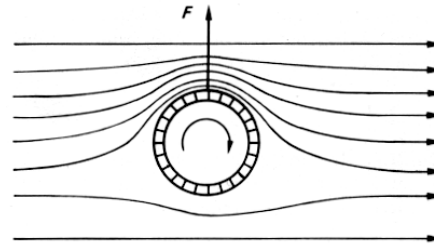
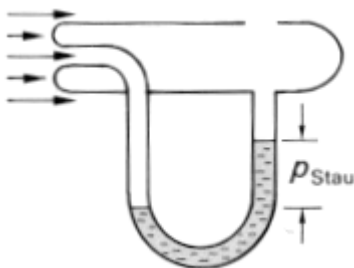
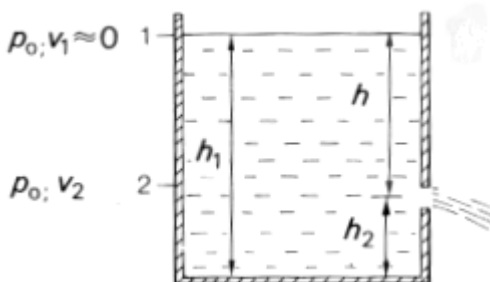


Bild 2-115. Magnus-Effekt.



Die Luftzufuhr am Prandl-Staurohr (linke Abbildung aus HMS Bild 2-108 entnommen) ist so gewählt, dass statischer Druck und geodätischer Druck an beiden Seiten des U-Rohrs anliegen, während der dynamische Druck (Staudruck) nur an einer Seite anliegt und durch den Gewichtsdruck der Differenz der Quecksilbersäule kompensiert wird. Aus der Messung des Staudrucks folgt die Bestimmung der Geschwindigkeit des Gasstroms mit der aus G (6.37) abgeleiteten Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2p_{\text{Stau}}}{\rho}} \quad (6.38)$$



Das Torricelli-Ausflussgesetz folgt ebenfalls aus der Bernoulli-Gleichung: Für eine Wasserhöhe h_1 bzw. h_2 und für die Wassertiefe (unter Oberfläche) $h = h_1 - h_2$ gilt $p_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$. Mit Ausflussgeschwindigkeit $v_1 = 0$ an der Oberfläche ergibt sich das Torricelli-Ausflussgesetz

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (6.39)$$