5 Mechanik des starren Körpers

Massepunkt hat mit den Translationen in x-, y-, z-Richtung 3 Freiheitsgrade der Bewegung. Beim starren Körper kommen Rotationen um die x-, y-, z-Achsen hinzu ⇒ 6 Freiheitsgrade.

- Freie Achsen, z.B. beim geworfenen Gegenstand in der Luft;
- Feste Achsen z. B. bei Türangel oder Roboterarm.

Es gibt Analogien für Translation ⇒ Rotation (Hilfsdimension "rad" nicht verwendet):

Weg s/m ⇒ Winkel φ/1, $$s \Rightarrow \varphi \quad (5.01)$$

Geschw. v/m s^{-1} ⇒ Winkelgeschw. ω/s^{-1} $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad (5.02)$$

Beschleun. a /m s^{-2} ⇒ Winkelbeschl. α /s^{-2} $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \quad (5.04)$$

Masse m/kg ⇒ Trägheitsmoment I /kg m^2 $$m \Rightarrow I = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 = \int_V r^2 \mathrm{d}m = \rho \int_V r^2 \mathrm{d}V \quad (5.05)$$

Das Massenträgheitsmoment I hängt von Form und Masse ab. Man beachte, dass r in G (5.05) der Abstand von der Rotationsachse und nicht etwa der Abstand vom Schwerpunkt ist.
I hängt also für einen starren Körper auch von der Lage und Richtung der Rotationsachse ab!
Das rechte Gleichheitszeichen in G (5.05) gilt nur, wenn die Dichte des Körpers konstant ist.

$$\rho \int_V r^2 \mathrm{d}V = 2\pi l \rho \int_{r_\text{innen}}^{r_\text{außen}} r^3 \mathrm{d}r = 2\pi l \rho \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r_\text{innen}}^{r_\text{außen}} = \frac{1}{2}\pi l \rho \left(r_\text{außen}^4 - r_\text{innen}^4 \right) = \frac{1}{2} m \left(r_\text{außen}^2 + r_\text{innen}^2 \right). \quad (5.06)$$

G (5.06) gilt für das Trägheitsmoment zylindrischer Körper bezüglich der Symmetrieachse als Rotationsachse. Das linke Gleichheitszeichen ergibt sich durch die Substitution $V = r^2 \pi l$ und $\mathrm{d}V = 2r \pi l \,\mathrm{d}r$ mit der Zylinderlänge l. Das rechte Gleichheitszeichen ergibt sich aus der Gleichung für die Masse eines solchen Zylinders mit $m = (r^2_\text{außen} - r^2_\text{innen}) \pi l \rho$.

Für einen Vollzylinder folgt aus G (5.06) $I = ½\, m\, r^2$ für das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse. Ein völlig anderes Ergebnis erhält man für

eine durch den Schwerpunkt gehende senkrecht zur (5.07)
Symmetrieachse eines Vollzylinders stehende Rotationsachse $I_\perp = ¼\, m\, r^2 + (1/12)\, m\, l^2$.

Für eine massive Kugel um alle Achsen durch den Schwerpunkt ist $I = (2/5)\, m\, r^2$,

für eine Kugelschale (hohl) um alle Achsen durch den Schwerpunkt $I = (2/3)\, m\, r^2$,

für einen Quader mit Abmessungen $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ mit Achsen durch Schwerpunkt und bei Rotation um die entsprechenden Achsen $I_x = (1/12)\, m\, (\Delta y^2 + \Delta z^2)$,

$I_y = (1/12)\, m\, (\Delta z^2 + \Delta x^2)$,

$I_z = (1/12)\, m\, (\Delta x^2 + \Delta y^2)$.

Die in G (5.07) stehenden Trägheitsmomente einiger Körper sind ohne Rechnung angegeben. Sie können analog zu G (5.06) berechnet werden, wobei die dreidimensionalen Volumenintegrale in geeigneter Form zu berechnen sind.

Für beliebige Körper stehen die Achsen mit höchsten und niedrigsten Trägheitsmoment senkrecht aufeinander. Diese zusammen mit einer weiteren (zu beiden senkrechten) Achse werden Hauptträgheitsachsen des Körpers genannt. Bei Rotationen um diese Achsen treten keine Lagerreaktionen auf, es sind also freie Achsen. Symmetrische Kreisel sind Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten.

Alle bisher betrachteten Achsen gehen durch den Schwerpunkt des Körpers.
Eine Parallelverschiebung solcher Schwerpunktachsen um den Abstand A ergibt ein größeres Trägheitsmoment I_A, das sich nach dem Steiner'schen Satz berechnet:

$$I_A = I_S + m\,A^2. \qquad (5.08)$$

Es folgen weitere Analogien für Translation ⇒ Rotation:

Kraft $\boldsymbol{F}$/N ⇒ Drehmoment $\boldsymbol{M}$ /N m $\quad \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = I\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$ (5.09)

Der Abstandsvektor $\boldsymbol{r}$ steht senkrecht auf der Drehachse. Das Vektorprodukt $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ sagt aus, dass kein Drehmoment erzeugt wird, wenn $\boldsymbol{F}$ parallel zu $\boldsymbol{r}$ ist, und ein maximales Drehmoment $r\,F$ bei senkrecht angreifender Kraft entsteht.

Impuls $\boldsymbol{p}$/N s ⇒ Drehimpuls $\boldsymbol{L}$/N m s $\quad \boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}\ \ (= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ (5.10)

Für den Drehimpuls gilt der Impulserhaltungssatz. ((Drehstuhlexperiment))

Arbeit W /J (=Ws) ⇒ Arbeit W /J (=Ws) $\quad \mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \Rightarrow \mathrm{d}W = \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ (5.11)

kinetische Energie E/J ⇒ kinetische Energie E /J $\quad E = \dfrac{m\,v^2}{2} \Rightarrow E = \dfrac{I\,\omega^2}{2}$ (5.12)

Aus G (5.12) folgt, dass ein kräftefreier Körper stets um seinen Schwerpunkt rotiert, da eine Verlagerung der Rotationsachse aus dem Schwerpunkt heraus nach dem Steiner'schen Satz die Energie erhöhen würde.