

4 Grundgesetze der klassischen Mechanik

In der Kinematik die sind Bewegungen beschrieben worden sind, in der Dynamik werden nun die Ursachen für die Bewegung der Körper beschrieben.

4.1 Masse und Kraft

Das **erste** Newtonsche Axiom heißt Trägheitsgesetz und sagt: *Richtung und Betrag der Geschwindigkeit eines Körpers werden in einem Inertialsystem beibehalten, wenn keine äußeren Kräfte wirken.*

Das **zweite** Newtonsche Axiom heißt Aktionsprinzip und sagt: *Die zeitliche Änderung des Impulses $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ist gleich der wirkenden Kraft, die dem Produkt aus Masse und Beschleunigung gleich ist,*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = m \mathbf{a} . \quad (4.01)$$

Das **dritte** Axiom heißt Wechselwirkungsgesetz und sagt: *actio = reactio ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$).*

Die Masse ist das Maß für die Trägheit, Massensymbol m , Masseneinheit kg. Trägheit ist Widerstand eines Körpers gegen Änderung des Bewegungszustands. Massen können mit Balkenwaagen verglichen werden.

Andere Eigenschaft ist die Schwere eines Körpers im Wirkungsbereich von Gravitationskräften. Die Schwere eines Körpers auf der Erde kann mit Federwaage gemessen werden, die eigentlich eine Kraft $F_G = mg$ bestimmt. ((Unterschied Äquator, Pole)) Die Übereinstimmung von schwerer mit träger Masse ist eine Grundlage der Einsteinschen Relativitätstheorie. Mit c_0 als Vakuumlichtgeschwindigkeit sagt die Relativitätstheorie: *Eine Masse, die sich in einem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, ist in diesem System um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c_0^2}}$ größer als die entsprechende ruhende Masse.*

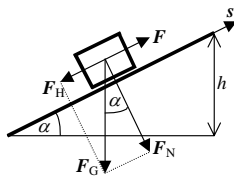
Die Kraft hat als SI-Einheit das Newton, es gilt $1\text{N} = 1\text{kg m s}^{-2}$. Die Kraft ist ein Vektor. Kräfteaddition und -zerlegung erfolgen nach den Regeln der Vektorrechnung bzw. analytischen Geometrie, siehe Bild 2-16 aus HMS unten.

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$	Kräfteparallelogramm	Kräfte	Richtungswinkel
Kräfteaddition; gegeben F_1, F_2, α, β		$F_x = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta$ $F_y = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta$ $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos(\beta - \alpha)}$	$\gamma = \arctan \frac{F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta}{F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta}$
Kräftezerlegung; gegeben F, γ, α, β oder F, γ, F_1, F_2		$F_1 = F \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}$ $F_2 = F \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$	$\alpha = \gamma - \arccos \frac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2 F F_1}$ $\beta = \gamma + \arccos \frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2 F F_2}$

Für einen unbeschleunigten Körper unter dem Einfluss von N Kräften gilt die Statik-Gleichung

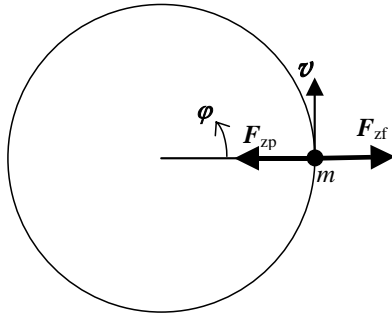
$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j = 0 . \quad (4.02)$$

4.2 Ausgewählte Kräfte



Für die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene, die mit der Horizontale den Winkel α einschließt, sind die Hangabtriebskraft F_H und die senkrecht zur Fläche wirkende Normalkraft F_N

$$F_H = m g \sin \alpha, \quad F_N = m g \cos \alpha. \quad (4.03)$$

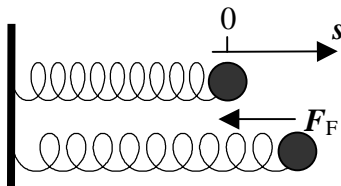


Die bei Drehbewegungen wirkende Zentrifugalkraft F_{zf} wird durch die Zentripetalkraft F_{zp} kompensiert: ((auf Zentrifuge hinweisen))

$$F_{zf} = m \omega^2 r = -F_{zp}. \quad (4.04)$$

Für viele makroskopische Systeme (Federn, elastische Verformung fester Körper) und mikroskopische Systeme (atomare Systeme, molekulare Systeme) ist die einer Verformung entgegenwirkende Kraft bei kleinen Auslenkungen s vom kräftefreien Zustand

$$F_F = -c s. \quad (4.05)$$



Die Proportionalitätskonstante c (hier Federkonstante) addiert sich einfach ($c = c_1 + c_2$), wenn man zwei Federn parallel schaltet. Bei Hintereinanderschaltung zweier Federn gilt die reziproke Addition ($1/c = 1/c_1 + 1/c_2$).

Sensorelement	Aufbau der Meßapparatur	Meßprinzip
Feder		Verlängerung der Feder ist proportional zur Kraft (Hookesches Gesetz).
Dehnungsmeßstreifen		Deformationen des Verformungskörpers werden auf die aufgeklebten Dehnungsmeßstreifen (DMS) übertragen. Der elektrische Widerstand R der DMS ändert sich proportional zur Dehnung ϵ . Die Widerstandsänderung wird in einer Wheatstoneschen Brückenschaltung gemessen: $\frac{\Delta R}{R} \sim \frac{\Delta l}{l} = \epsilon$.
piezoelektrischer Kristall		Kristalle ohne Symmetriezentrum (z. B. Quarz) zeigen den piezoelektrischen Effekt. Bei Belastung treten an den Kristalloberflächen elektrische Ladungen auf, die mit einem Ladungsverstärker nachgewiesen werden. Die Ladungsmenge ist proportional zur Kraft $\Delta Q \sim F$.
Glasfaser		Bei Belastung verbiegt sich die Glasfaser. Dadurch werden Lichtwellen vom Faserkern in den -mantel ausgekoppelt (Leckwellen), und das Empfängersignal geht zurück.

Bild 2-19. Methoden der Kraftmessung.

Reibung erzeugt eine der Bewegung von Festkörpern auf Festkörpern (*) oder in Flüssigkeiten (**) oder in Gasen (***) entgegengerichtete Kraft. Die Reibungskraft ist proportional der Kraft F_N , mit dem die reibenden Festkörper zusammengepresst werden (*) oder proportional zu v (** laminar) oder v^2 (***) turbulent) bei Strömung in Flüssigkeiten und Gasen. Der Übergang zwischen laminarer und turbulenter Strömung ist nicht an flüssig/gasförmig gebunden.

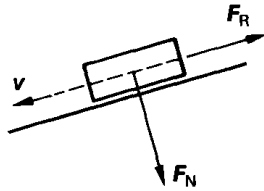
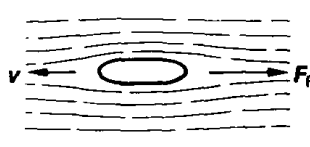
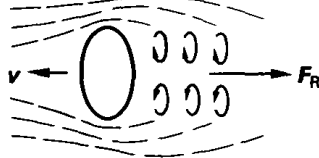
	äußere Reibung Festkörperreibung	innere Reibung Flüssigkeitsreibung	turbulente Reibung Luftreibung
Reibungskraft			
Ansatz	$F_R = \mu F_N$	$F_R = b v$	$F_R = d v^2$
Proportionalitätsfaktor	μ : Reibungszahl μ ist unabhängig von der Kontaktfläche zwischen Körper und Unterlage; hängt ab von der Kontaktgeometrie und den Materialien von Körper und Unterlage.	b : Zähigkeitskoeffizient b hängt von der Form des Körpers und der Viskosität η der Flüssigkeit ab. Es wird laminare Strömung vorausgesetzt.	d : Luftreibungskoeffizient d hängt von der Anströmfläche und der Oberflächenbeschaffenheit des Körpers sowie von der Dichte und Art des strömenden Mediums ab.
Spezialfälle	μ_R : Rollreibung μ_G : Gleitreibung μ_H : Haftreibung	$b = 6 \pi \eta r$ laminare Umströmung einer Kugel vom Radius r in einem Medium mit der Zähigkeit η	$d = \frac{1}{2} c_w \rho A$ Körper mit Anströmfläche A und dem Widerstandskoeffizient c_w im Medium der Dichte ρ

Bild 2-20. Reibungskräfte.

Tabelle 2-3. Haft- und Gleitreibungszahlen.

Stoffpaar	μ_H	μ_G
Stahl auf Stahl	0,15	0,12
Stahl auf Holz	0,5 bis 0,6	0,2 bis 0,5
Stahl auf Eis	0,027	0,014
Holz auf Holz	0,65	0,2 bis 0,4
Holz auf Leder	0,47	0,27
Gummi auf Asphalt	0,9	0,85
Gummi auf Beton	0,65	0,5
Gummi auf Eis	0,2	0,15

4.3 Dynamik in gleichförmig rotierenden Bezugssystemen

In nicht-relativistischen Bezugssystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, sind Kräfte und Beschleunigungen gleich. Ein Beobachter in einem System, das zusätzlich gegenüber einem Inertialsystem eine Beschleunigung erfährt, muss die Wirkung einer zusätzlichen Trägheits- bzw. Schein-Kraft annehmen, um die Beobachtungen in seinem System mit den Gesetzen der Mechanik in Übereinklang zu bringen.

((Personen in Trommelkarussell oder abstürzenden Fahrstuhl beschreiben, Inertialsysteme erläutern))

Die Dynamik in gleichförmig rotierenden Bezugssystemen kann mit Zentrifugalkraft und Coriolis-Kraft erklärt werden. Im Kapitel 3.4 (Drehbewegung) war in G (3.27) der Zusammenhang zwischen Tangentialgeschwindigkeit \boldsymbol{v} und Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und Radiusvektor \boldsymbol{r} gezeigt worden:

$$\boldsymbol{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \quad (4.06)$$

Findet im rotierenden Koordinatensystem zusätzlich zur Drehbewegung eine Bewegung mit der Geschwindigkeit \boldsymbol{v}' statt, ist die im ruhenden Koordinatensystem beobachtete Gesamtgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \quad (4.07)$$

Betrachtet man die Beschleunigung $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ im ruhenden System, setzt sie sich aus einer Beschleunigung im rotierenden System $(d\boldsymbol{v}/dt)_{\text{rot}}$ und der Zentrifugalbeschleunigung $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ zusammen:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \quad (4.08)$$

G (4.07) in G (4.08) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \\ & \left(\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \\ & \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}' - 2\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (4.09)$$

Aus dem letzten Term in G (4.09) wird $\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}$, da \boldsymbol{r} stets senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und $(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega})$ senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und das Vektorprodukt $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega})$ parallel zu \boldsymbol{r} stehen. Damit wird aus G (4.09) durch Umstellen

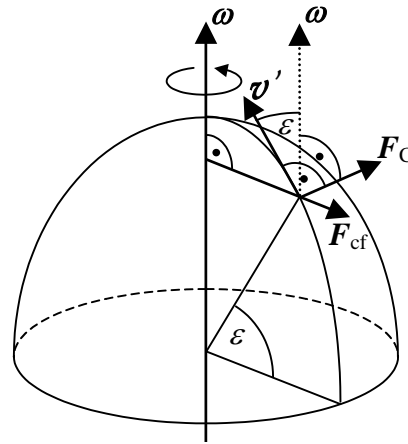
$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}. \quad (4.10)$$

Multiplikation mit der Masse m ergibt als Kraft im rotierenden System

$$\boldsymbol{F}_{\text{rot}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{Coriolis}} + \boldsymbol{F}_{\text{zf}}, \quad (4.11)$$

wobei neben zur Kraft im ruhenden System die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft addiert werden. Am Äquator wirkt für \boldsymbol{v}' parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ keine Coriolis-Kraft, vgl. nächste Abbildung.

Nebenstehende Abbildung charakterisiert die Zentrifugalkraft F_{zf} und die Coriolis-Kraft $F_{Coriolis} = 2m\mathcal{V}\omega \sin\varepsilon$ auf der nördlichen Erdhalbkugel bei Bewegung entlang eines Längengrads. ε ist der Winkel nördlicher Breite. Punkte bezeichnen rechte Winkel. Der punktierte Vektor ω ist eine Parallelverschiebung der Erdachse.



4.4 Arbeit und Energie

Die mechanische Arbeit dW wird bei Verschiebung eines Massepunktes (Schwerpunktes) durch eine Kraft F um das Wegelement ds geleistet:

$$dW = F ds = |F||ds| \cos(F, ds). \tag{4.12}$$

In G (4.12) ist wie bei allen weiteren Betrachtungen das mit dem vorgesetzten "d" bezeichnete differentielle Element verwendet worden, das aus dem mit einem vorgesetzten "Δ" bezeichneten Differenzelement durch Grenzübergang entsteht, vgl. Gleichungen (3.03), (3.20), (3.22).

In der Mitte von G (4.12) steht das Skalarprodukt zweier Vektoren.

Für *ortsabhängige* Kräfte ist bei einem Weg vom Punkt 1 nach 2 das Integral

$$W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F ds, \tag{4.13}$$

zu berechnen, während für *ortsunabhängige* Kräfte eine einfache Beziehung gilt:

$$W = F s_{1 \rightarrow 2}. \tag{4.14}$$

Beispiele für mechanische Arbeit sind:

<p>Hub (senkrechter Hub für $\alpha = 90^\circ$)</p>		$F_H = m g \sin \alpha$ $W = m g h$
<p>Reibung</p>		$F_R = \mu F_N$ $= \mu m g$ $W = \mu m g s$
<p>Beschleunigung</p>		$F = m a$ $W = m a s$ $= \frac{1}{2} m (\mathcal{V}_{\text{Ende}}^2 - \mathcal{V}_{\text{Anfang}}^2)$
<p>Verformung</p>		$F_{\text{rück}} = -c x$ $W_{0 \rightarrow x} = \frac{1}{2} c x^2$

Für die Leistung gilt

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \frac{ds}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v}. \quad (4.15)$$

Der Wirkungsgrad eines Leistungswandlers ($0 \leq \eta \leq 1$) wird als Verhältnis der effektiv abgegebenen zur (hineingesteckten) Nennleistung definiert

$$\eta = \frac{P_{\text{effektiv}}}{P_{\text{N}}}. \quad (4.16)$$

Die Energie eines Systems wird durch Zufuhr oder Abgabe mechanischer Arbeit erhöht oder erniedrigt. Als Energiesatz der Mechanik gilt die Gleichung

$$dE = dW. \quad (4.17)$$

Die mechanische Energie eines Körpers setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}. \quad (4.18)$$

$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant}$ gilt als Energieerhaltungssatz der Mechanik.

Z. B. ist $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$, $E_{\text{pot Lage}} = m g h$, $E_{\text{pot elast.}} = \frac{1}{2} c s^2$.

Allgemeine Formulierungen des Gesetzes der Erhaltung der Energie sind:

- Im abgeschlossenen System ist die Energie konstant.
- Man kann keine Maschine bauen, die ohne Energiezufuhr dauernd Arbeit verrichtet.

4.5 Impulse

Der Impuls ist die Bewegungsgröße eines Körpers (Massepunktes). Es gilt

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad (4.19)$$

mit der SI-Einheit $\text{kg m s}^{-1} = \text{N s}$. Der Impuls ändert sich unter dem Einfluss einer Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p}_{\text{Ende}} - \mathbf{p}_{\text{Anfang}} = \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} \mathbf{F}(t) dt. \quad (4.20)$$

vgl. G (4.01). Die rechte Seite von G (4.20) beschreibt einen Kraftstoß.

Wir betrachten nun ein abgeschlossenes System von n Massepunkten. Die Gesamtmasse m des Systems ist $m = \sum_{k=1}^n m_k$. Für den Ortsvektor des Schwerpunkts \mathbf{r}_S dieses Systems gilt

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k}{m}. \quad (4.21)$$

Wirken auf das System keine äußeren Kräfte, dann ist die Summe aller inneren Kräfte ($k = j$ ausgeschlossen) null:

$$\sum_{k,j=1}^n \mathbf{F}_{kj} = 0. \quad (4.22)$$

In diesem Fall gilt der Impulserhaltungssatz:

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k = \mathbf{p} = \text{konstant} \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (4.23)$$

Für zwei sich stoßende Teilchen gilt z. B. $m_1 \mathbf{v}_1'' + m_2 \mathbf{v}_2'' = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'$, wobei die einfach bzw. zweifach gestrichelten Geschwindigkeiten jene vor bzw. nach dem Stoß darstellen.

Unter dem Einfluss einer äußeren (auf den Schwerpunkt wirkenden) Kraft \mathbf{F}_a ändert sich G (4.23) in

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_a. \quad (4.24)$$

Gewöhnlich gilt für Geschwindigkeiten weit unter der Lichtgeschwindigkeit $d\mathbf{p}/dt = m d\mathbf{v}/dt$, weil die Masse als konstant angenommen wird. Eine Rakete bekommt ihren Schub jedoch gerade durch ausgestoßene Gase d. h. durch einen Masseverlust. Es gilt wegen der Produktregel der Differentiation

$$\mathbf{F}_a = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{relativ}} \frac{dm}{dt}. \quad (4.25)$$

Der Übergang von \mathbf{v} zu $-\mathbf{v}_{\text{relativ}}$ trägt dem Sachverhalt Rechnung, dass die mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{\text{relativ}}$ ausgestoßenen Gase eine Geschwindigkeit entgegengesetzt zur Rakete haben. Der Rückstoß dieser Gase erzeugt den Schub für die Rakete (beachte negatives dm/dt):

$$\mathbf{F}_{\text{Schub}} = \mathbf{v}_{\text{relativ}} \frac{dm}{dt} = \mathbf{v}_{\text{relativ}} \dot{m}. \quad (4.26)$$

Insgesamt ergibt sich für die Änderung der Geschwindigkeit der Rakete

$$m(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_{\text{Schub}}, \quad (4.27)$$

wobei $m(t) = m_0 - |\dot{m}|t$ ist.

Rechnet man mit konstanter Erdbeschleunigung g und der Startgeschwindigkeit null, ergibt sich für die Beschleunigung

$$a(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{|\dot{m}|}{m_0 - |\dot{m}|t} \mathbf{v}_{\text{relativ}} - g \quad (4.28)$$

und durch Integration von G (4.28)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\text{relativ}} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - |\dot{m}|t}\right) - g t. \quad (4.29)$$

Die Endgeschwindigkeit nach der Brennschlusszeit t_B (Ziolkowskij-Raketengleichung) erhält man aus G (4.29) durch Einsetzen von $t = t_B$ und $m_0 - |\dot{m}|t = m_{\text{Leer}}$.

4.6 Stöße

Für Stöße gilt stets der Impulserhaltungssatz, vgl. G (4.23). Für elastische Stöße (nicht aber für inelastische Stöße) gilt außerdem der mechanische Energieerhaltungssatz, da keine mechanische Energie in Wärme oder Verformungsenergie umgewandelt wird. Bei einem völlig inelastischen Stoß (unelastischen Stoß) haben beide Körper nach dem Stoß die gleiche Geschwindigkeit. Wir betrachten hier nur zentrale Stöße zweier Teilchen, für die eine eindimensionale Darstellung ausreichend ist. Geschwindigkeiten vor bzw. nach dem Stoß sind einfach bzw. doppelt gestrichen. Der Impulserhaltungssatz ergibt

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = m_1 \mathbf{v}''_1 + m_2 \mathbf{v}''_2, \quad (4.30)$$

und aus dem Energieerhaltungssatz folgt

$$\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}'_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}''_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}''_2{}^2. \quad (4.31)$$

Durch Umformung und ineinander Einsetzen der Gleichungen (4.30) und (4.31) ergeben sich für die Geschwindigkeiten nach dem elastischen Stoß

$$\begin{aligned} \mathbf{v}''_1 &= \frac{(m_1 - m_2) \mathbf{v}'_1 + 2m_2 \mathbf{v}'_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{v}''_2 &= \frac{(m_2 - m_1) \mathbf{v}'_2 + 2m_1 \mathbf{v}'_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Für den völlig unelastischen Stoß lässt sich die gemeinsame Geschwindigkeit allein aus dem Impulserhaltungssatz berechnen:

$$\mathbf{v}''_{1,2} = \frac{m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.33)$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen (4.33) und (4.32) und der Definition der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ lässt sich der Verlust mechanischer Energie als

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)^2 \quad (4.34)$$

berechnen.