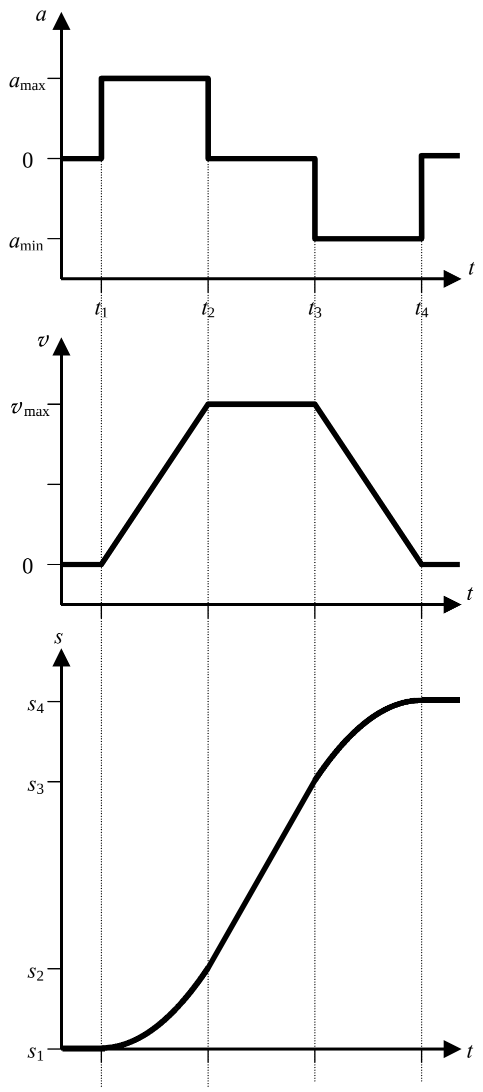
3 Mechanik der Punktmassen

Mechanik ist seit Isaak Newton das am gründlichsten erforschte Gebiet der Physik. Aussagen haben ihren deterministischen Charakter behalten, soweit sie nicht durch Quantenmechanik im mikroskopischen Bereich oder durch Relativitätstheorie bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit revidiert wurden.

Mechanik der Punktmassen geht von grober Näherung aus: Räumlicher Körper wird als Punktmasse mit unendlicher Dichte und verschwindenden Trägheitsmomenten betrachtet.

3.1 Eindimensionale Bewegung

Die Bewegung eines punktförmigen Körpers wird in nur einer Dimension s (Strecke, Weg) beschrieben. Untenstehende Abbildung zeigt Diagramme für einen für $t < t_1$ und $t > t_4$ ruhenden Körper, der in der Zeit $t_1 < t < t_2$ beschleunigt, in der Zeit $t_2 < t < t_3$ eine konstante Geschwindigkeit hat und in der Zeit $t_3 < t < t_4$ auf die Geschwindigkeit null gebremst wird.



Allgemein lässt sich aus dem Weg-Zeit-Diagramm die mittlere Geschwindigkeit in Δt als

$$v_m = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{(t+\Delta t)-t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (3.01)$$

bestimmen. Die Momentangeschwindigkeit ergibt sich durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$, was dem Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten entspricht:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \qquad (3.02)$$

Der Punkt über dem s entspricht konventionsgemäß der ersten Ableitung (des Weges) nach der Zeit. Die Geschwindigkeit ist also der Anstieg im Weg-Zeit-Diagramm.

Analog ergibt sich die Beschleunigung a als Anstieg im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \frac{\mathrm{d}\dot{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}\,. \qquad (3.03)$$

Integrationen im Zeitbereich von $t = 0$ bis t ergeben

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad (3.04)$$

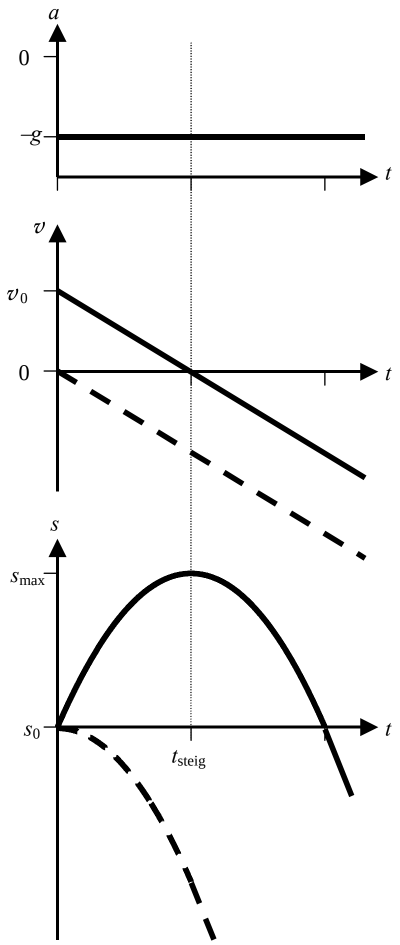
$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t\,. \qquad (3.05)$$

Bei konstanter Beschleunigung gilt

$$v(t) = v_0 + a \cdot t\,,$$

(3.06)

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2\,. \qquad (3.07)$$



Eine einfache Anwendung dieser Gleichungen ergibt sich bei dem senkrechten Wurf nach oben und dem freien Fall, siehe Abbildung links. In beiden Fällen gilt $a = -g$, wobei die Erdbeschleunigung mit ca. 9,8 m s^{-2} einzusetzen ist. Beim Wurf nach oben kann man in G (3.6) davon ausgehen, dass die Geschwindigkeit zur Steigzeit $t(s_{\max})$ null ist, wobei $s_{\max}$ die maximale Steighöhe bezeichnet. Damit ergibt sich aus G (3.6) die Beziehung

$$t(s_{\max}) = v_0/g. \tag{3.08}$$

Beginnt man den Wurf nach oben von der Position $s = s_0$ aus, ergibt sich für die maximale Steighöhe aus G (3.07), $a = -g$ und $t(s_{\max}) = v_0/g$ die Gleichung

$$s_{\max} = s_0 + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{3.09}$$

G (3.08) und G (3.09) beschreiben den Wurf nach oben in der Zeit $0 < t < t_{\text{steig}}$. Beim Wurf nach oben mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Position $s = s_0$ aus und einem anschließenden freien Fall bis zur Position $s = 0 < s_0$ (die Höhe $s = 0$ liegt also unterhalb der Höhe, in der der Wurf beginnt) ergeben sich folgende Gleichungen für Zeit beziehungsweise Geschwindigkeit

$$t_{\text{Wurf und freierFall}} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2g\, s_0}}{g}, \tag{3.10}$$

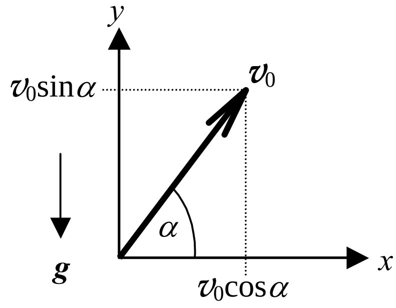
$$v_{\text{Wurf und freierFall}} = -\sqrt{v_0^2 + 2g\, s_0}\,. \tag{3.11}$$

Setzen wir $s_0 = h$ und $v_0 = 0$ ergeben sich aus den Gleichungen (3.10) und (3.11) die Spezialfälle des freien Falls aus der Höhe h:

$$t_{\text{freierFall}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{3.12}$$

$$v_{\text{freierFall}} = -\sqrt{2g\, h}\,. \tag{3.13}$$

Der "freie Fall" ist in obiger Abbildung gestrichelt dargestellt.



3.2 Zweidimensionale Bewegung

Mehrdimensionale Betrachtungen sind für alle Dimensionen getrennt zu führen. Ein zweidimensionales Beispiel ist der schiefe Wurf nach oben.

Mit den Größen aus der rechten Abbildung gilt

$$v_x = v_0\cos\alpha, \tag{3.14}$$

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt \tag{3.15}$$

und

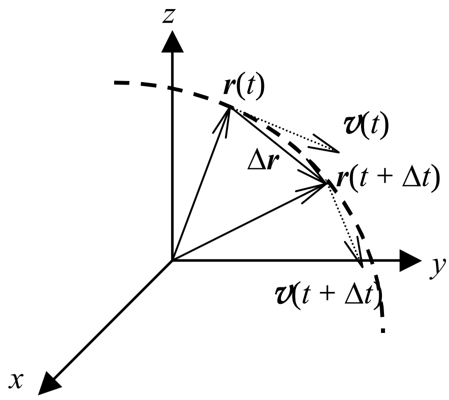
$$x = v_0\cos\alpha \times t, \tag{3.16}$$

$$y = v_0\sin\alpha \times t - gt^2/2 \tag{3.17}$$

G (3.16) kann man in $t = x/(v_0\cos\alpha)$ umstellen und in G (3.17) einsetzen. Dadurch erhält man die Bahnkurve, die die Zeit nicht mehr explizit enthält:

$$y = x\tan\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \tag{3.18}$$

G (3.18) stellt die Wurfparabel beim schrägen Wurf nach oben dar. Diese Parabel sollte nicht mit der Parabel in der Zeitabhängigkeit des geraden Wurfs nach oben im Kapitel 3.1 verwechselt werden.



3.3 Dreidimensionale Bewegung

Eine Bahnkurve (gestrichelte Linie in Abbildung rechts) im Raum wird durch zeitabhängige Ortsvektoren $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ beschrieben, wobei x, y und z die zeitabhängigen Ortskoordinaten sind. Die mit x, y und z in der linken Abbildung bezeichneten Pfeile bezeichnen die Richtung der Basisvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$ des kartesischen Koordinatensystems.

Aus G (3.01) wird im Raum

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{3.19}$$

und aus G (3.02) wird

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Die Abbildung zeigt, dass der Vektor der Momentangeschwindigkeit stets tangential zur Bahnkurve ist. Die Bahntangente ergibt sich aus der Verlängerung von d$\boldsymbol{r}$. Der Einheitsvektor (Betrag eins) $\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}}$ hat die Richtung der Momentangeschwindigkeit. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit erfolgt in Richtung des Normal-Einheitsvektors $\boldsymbol{e}_{\mathrm{norm}}$. Dieser steht senkrecht auf $\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}}$ und zeigt in die Richtung des Mittelpunktes eines Kreises (mit Radius R), mit dessen Bogenstück die Raumkurve in der Umgebung des momentanen Punktes am besten angepasst werden kann.

Aus

$$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_{\text{tan}} \tag{3.21}$$

ergibt sich analog zu G (3.03)

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\,\boldsymbol{e}_{\text{tan}})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\text{tan}} + v\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{e}_{\text{tan}})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_{\text{tan}} + \boldsymbol{a}_{\text{norm}}\,, \tag{3.22}$$

wobei in G (3.22) die Produktenregel der Differentiation angewendet wurde. Aus G (3.22) ist zu entnehmen, dass der Betrag der Tangentialkomponente der Beschleunigung der zeitlichen Ableitung des Betrages der Geschwindigkeit entspricht:

$$\boldsymbol{a}_{\text{tan}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\text{tan}}\,, \tag{3.23}$$

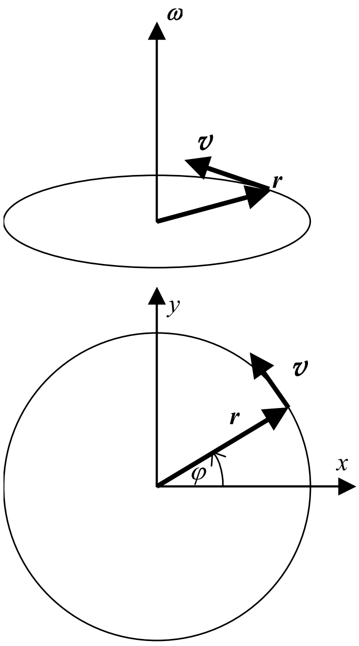
Da außerdem

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\text{tan}}}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\boldsymbol{e}_{\text{norm}} \tag{3.24}$$

gilt, ist die Normalkomponente der Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}_{\text{norm}} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\text{norm}}\,. \tag{3.25}$$

3.4 Drehbewegung



Eine Kreisbewegung kann als beschleunigte Bewegung betrachtet werden, bei der die Normalkomponente der Beschleunigung stets zum Kreismittelpunkt gerichtet ist. Für diese Zentripedalbeschleunigung gilt also

$$\boldsymbol{a}_{\text{zp}} = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_{\text{normal}} \tag{3.26}$$

Drehbewegung kann durch einen Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$ im Raum beschrieben. Der Vektor hat den Betrag $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ und steht senkrecht auf der Ebene, in der die Drehung stattfindet. Für die Umfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ist

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{3.27}$$

Für den Spezialfall einer gleichförmigen Drehung in der x-y-Ebene zeigt der Rotationsvektor in die z-Richtung. Der bei einer Rotation um den Winkel φ zurückgelegte Weg ist $r\varphi$, wobei der Winkel φ im Bogenmaß (ein rechter Winkel entspricht $\pi/2$) anzugeben ist. Die Frequenz (ν oder f) bzw. Drehzahl (n) einer Drehung entspricht der reziproken Periodendauer T einer Umdrehung, und die Kreisfrequenz ω ist das 2π-fache:

$$\omega = 2\pi\,\nu = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{3.28}$$

Für Zentripedalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{\text{zp}}$, Tangentialbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{\text{tan}}$ und Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}$ gelten ($\boldsymbol{a}_{\text{zp}}$ und $\boldsymbol{a}_{\text{tan}}$ sind lateinische Buchstaben, $\boldsymbol{\alpha}$ ist griechischer Buchstabe)

$$\boldsymbol{a}_{\text{zp}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\omega^2\,\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a}_{\text{tan}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}\,, \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{3.30}$$