2 Auswertung von Messergebnissen

Die Genauigkeit von Messungen wird beeinträchtigt durch:

- systematische Abweichungen infolge falscher Eichung, falscher Kalibrierung, falscher Justierung sowie thermischer oder zeitlicher Instabilitäten von Messgeräten,
- statistische Fehler (zufällige Messabweichungen).

Bei zufälligen Messabweichungen ist die Häufigkeitsverteilung der gemessenen Werte symmetrisch zu einem häufigsten Wert, dem Erwartungswert μ.

Beispiel: Messung der Schwingungsdauer T eines Fadenpendels (Pendellänge 36,4 cm) durch 100 Einzelmessungen von Schwingungsperioden mit Stoppuhr (Δt = 0,01 s). N ist die Gesamtzahl der Messungen, in diesem Beispiel N = 100. N_j ist die Zahl der Messungen, die den Wert j ergeben, z. B. $N_j = 28$ für j = 1,21 s. Die Auftragung der relativen Häufigkeit $h_j = N_j/N$ einzelner Messwerte in einem Histogramm zeigt die rechte Abbildung (Bild 1-5 HMS). Hier und im weiteren bezeichnet HMS das Lehrbuch "Physik für Ingenieure" von Hering, Martin und Stohrer.

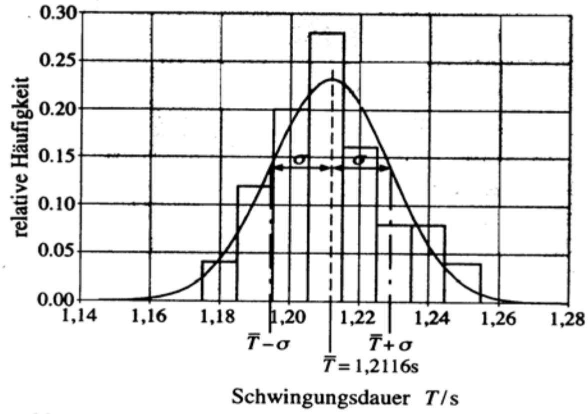

Bild 1-5. Histogramm der Häufigkeitsverteilung $h_j(T)$ bei einer Schwingungsdauermessung sowie die Normalverteilungskurve nach Gl. (1-2) für $\mu = \bar{T}$ und $\sigma^2 = s_T^2$ mit $\bar{T}$ = 1,2116 s und s_T = 0,0172 s.

Eine drastische Erhöhung Zahl der Messungen und der Genauigkeit der Anzeige der Stoppuhr überführt die Häufigkeitsverteilung $h(x_j)$ in die von Carl Friedrich Gauß aufgestellte Fehlernormalverteilung:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (2.1)$$

Die Variable x steht im Beispiel des Pendels für die experimentell gemessene Schwingungsdauer, der Erwartungswert μ bezeichnet die "wahre Schwingungsdauer" und die Breite der Kurve wird durch die "Streuung" (Varianz) σ^2 bestimmt. σ bezeichnet man als die Standardabweichung der Normalverteilung.

Diskussion der Fehlernormalverteilung:

- $h(x)\mathrm{d}x$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung der beobachtete Wert x im Intervall zwischen x und $x + \Delta x$ liegt.
- $h(x)$ ist eine symmetrische Funktion, deren Integral den Wert eins hat. D. h., die Wahrscheinlichkeit, dass x im Intervall zwischen null und unendlich liegt, ist eins.
- Nur 68,3 % aller Messwerte liegen im durch die Standardabweichung gegebenen Intervall $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$. Selbst im doppelten Interwall $\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma$ liegen nur 95,4 % aller Messwerte.

Weitere wichtige Gleichungen der Fehlerrechnung sind der arithmetische Mittelwert (Schätzwert für den Erwartungswert)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \,, \tag{2.2}$$

die Standardabweichung eines Messwerts (andere Bezeichnungen sind Standardabweichung des Messverfahrens, Wurzel der Varianz, Wurzel der Streuung)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(x_j - \bar{x}\right)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(x_j - \mu\right)^2}{N}} \,, \tag{2.3}$$

($\bar{x}$ ist experimentell ermittelt, μ wird als bekannt vorausgesetzt)
und die Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \,. \tag{2.4}$$

Man beachte, dass anstelle des Symbols σ oft s und anstelle von $\bar{x}$ oft $\langle x \rangle$ stehen.

Gn (2.2-4) beinhalten, dass Standardabweichung des Messverfahrens unabhängig von N ist, aber die Standardabweichung des arithmetischen Mittels sich mit der Wurzel aus N verringert.

$\Delta\bar{x}$ in G (2.4) stellt den absoluten Fehler einer Messserie (bei Einzelmessung ist $N = 1$) dar, der die Dimension von x hat. Wird eine Messgröße aus der Summe oder Differenz zweier Messungen bestimmt (z. B. wird die Messung des Gewichts des Inhalts einer Flasche aus der Differenz des Gewichts der vollen und der leeren Flasche bestimmt), addieren sich die absoluten Fehler.

Der dimensionslose relative Fehler ergibt sich als $\Delta\bar{x}/\bar{x}$ für die Messung einer Größe.
Oft wird ein physikalischer Wert aus Produkten und Quotienten unterschiedlicher Messgrößen bestimmt. Dann addieren sich die relativen Fehler mit dem Gewicht der absoluten Potenz. Zum Beispiel bestimmt sich die Dichte eines Zylinders aus (Durchmesser)^2 mal Höhe mal $\pi/4$ durch Gewicht. Allgemein gilt für die Fehlerfortpflanzung von drei Größen $f = x^a y^b z^c$

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} = |a|\left|\frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}}\right| + |b|\left|\frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}}\right| + |c|\left|\frac{\Delta\bar{z}}{\bar{z}}\right| , \tag{2.5}$$

wobei für das Beispiel des Zylinders x für den Durchmesser, y für die Höhe und z für das Gewicht stehen sowie $a = 2$, $b = 1$ und $c = -1$ gelten.

Zur Auswertung der Messergebnisse gehört oft eine Beschreibung der Werte durch eine analytische Kurve. Das einfachste Beispiel dafür ist die Anpassung von Messwerten (x_i, y_i) an eine Gleichung $y = a_0 + a_1 x$ (lineare Regression).

Beispiel: Messung der Volumenausdehnung eines idealen Gases in Abhängigkeit von der Temperatur zwischen 300 K und 370 K. Das Volumen möge bei der Temperatur des Tripelpunkts des Wassers genau 1 m^3 betragen. Glasballon im Wasserbad wird erwärmt, Thermometer misst den x_i-Wert, im waagerechten Dilatometerrohr wird das zugehörige Volumen y_i bestimmt. ((Messanordnung skizzieren)) Danach wird die Wassertemperatur geändert und ein neues Wertepaar gemessen. Insgesamt N Wertepaare werden zweidimensional als $y(x)$ da heißt als $V(T)$ aufgetragen. (($V(T)$ skizzieren))

Kommerzielle Rechenprogramme erledigen dann folgende Aufgabe:

$$\text{Fehlersumme} = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_1 x_i - a_0)^2 \Rightarrow \text{Minimum}. \tag{2.6}$$

Mathematisch bedeutet das das Verschwinden der Ableitung der Fehlersumme nach a_1 und a_0. Für das Beispiel der temperaturabhängigen Volumenausdehnung müsste das Rechenprogramm bei idealer Genauigkeit der Messungen und idealem Gas $a_0 = 0$ m^3 und $a_1 = (1/273{,}16)$ m^{3}K^{-1} ergeben.

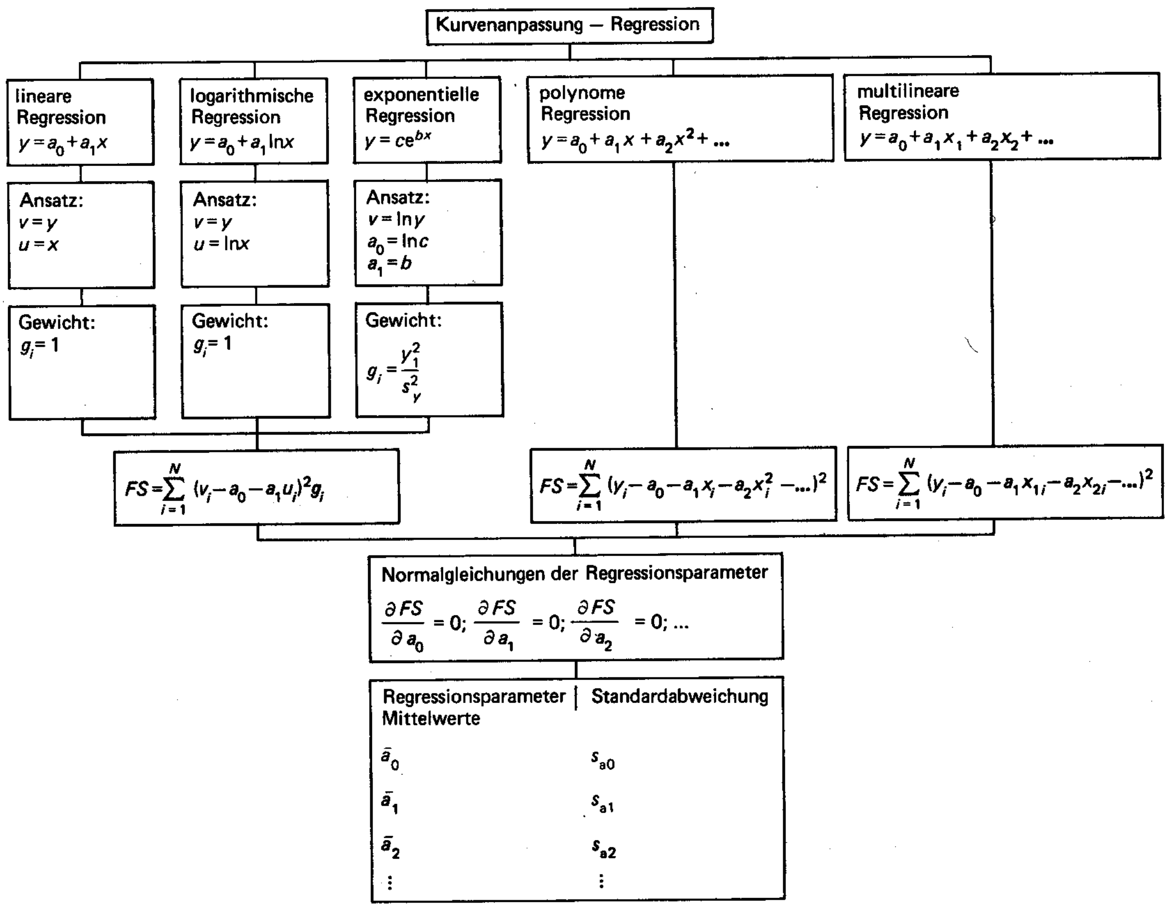

Bild 1-7. Funktionen mit einem linearen Normalgleichungssystem für die Parameter der Kurvenanpassung.

Obige Abbildung (Bild1-7 HMS) beschreibt auf der linken Seite die lineare Regression.

Messungen könnten jedoch ungenau, das Gas könnte nicht ideal sein, oder es könnte überhaupt kein linearer Zusammenhang vorliegen, wie bei der Wasserausdehnung im Bereich 0–10 °C. Dann kann mit dem Korrelationskoeffizienten *r* eine Aussage über die Korrelation der Messpunkte mit einer Geradengleichung gemacht werden. Mit $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ als Mittelwerten über alle Messwerte von x_i bzw. y_i analog zu G (2.2) kann der Korrelationskoeffizient aus der Gleichung

$$r = \left| \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \ \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}} \right| \tag{2.7}$$

bestimmt werden. Er ist 1 für eine ideale Korrelation, z. B. für eine Gerade durch zwei Punkte. $r > 0{,}9$ bezeichnet eine wahrscheinliche, $r < 0{,}5$ eine eher unwahrscheinliche Korrelation. Das Bild unten (Bild 1-10 HMS) zeigt die Korrelationsanalyse der mittleren täglichen Heizleistung eines Hauses

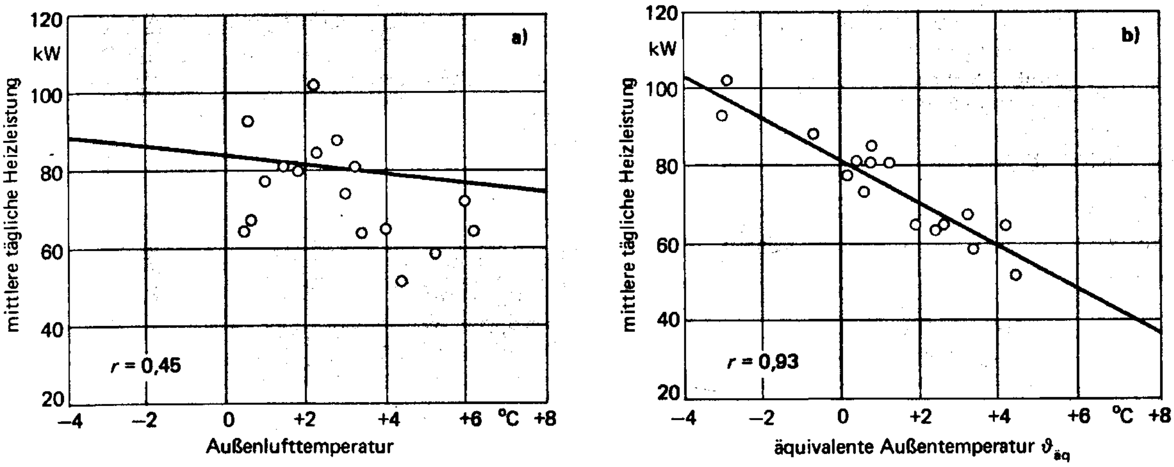

Bild 1-10. Korrelationsanalyse der mittleren täglichen Heizleistung eines Wohnhauses:
a) Zusammenhang zwischen Heizleistung und Außenlufttemperatur; Korrelation unwahrscheinlich (r < 0,5);
b) Zusammenhang zwischen Heizleistung und äquivalenter Außentemperatur (unter Berücksichtigung von Sonnenzustrahlung und Windeinfluß); Korrelation wahrscheinlich (r > 0,9).

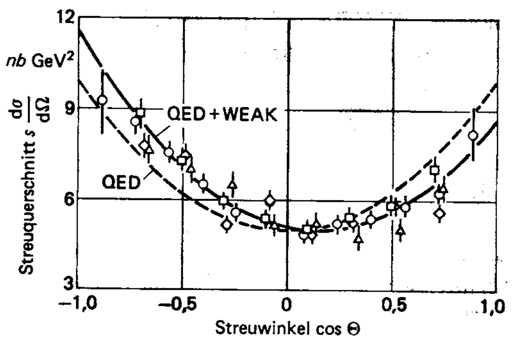

Bild 1-6. PETRA-Experimente am Deutschen Elektronen-Synchrotron (DESY) bewiesen 1983 das Versagen der reinen Quanten-Elektrodynamik (QED) bei der Erzeugung von Myonen und bestätigten im Rahmen der Meßgenauigkeit die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung (QED + WEAK).

Ist keine Gerade sondern z. B. eine logarithmische, exponentielle Abhängigkeit, ein Polynom oder mehrdimensionale lineare Abhängigkeit zu vermuten, müssen entsprechende Ansätze gemacht werden und die Rechnung verkompliziert sich. Vergleiche Bild 1-7 HMS auf voriger Seite, das die Auswertung für den allgemeinen Fall darstellt.

Ein spezielles Beispiel zeigt die linke Abbildung (Bild 1-6 HMS).