Übungen zu Theoretische Physik 3
WS 2015/16

Blatt 6

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 23.11.

Übung 1. 6 P.

Auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ seien die Operatoren

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeige, dass diese selbstadjungiert sind und bestimme die Eigenwerte und Basen von Eigenvektoren. Bestimme die Projektoren $P_{\mathcal{H}_\lambda}$ für die Eigenräume. Beachte dabei, dass für einen normierten Vektor $\psi = (c_1, c_2, \dots) \in \mathbb{C}^n$, der entsprechende Projektor durch die Matrix

$$P_\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \dots \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Überprüfe die Gültigkeit der Spektraldarstellung

$$A = \sum_{a \in \Sigma(A)} a P_{\mathcal{H}_a}$$

für $A = \sigma_i$, $i = 1, 2, 3$.

Übung 2. 2 P.

Seien ψ, ϕ normierte Vektoren eines Hilbertraums und $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. Zeige, dass

$$P = P_\psi + P_\phi$$

genau dann ein Projektor ist, wenn $\langle\psi|\phi\rangle = 0$ gilt. Auf welchen Unterraum projiziert P?