Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 9

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 08.12., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 11.12. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Argument und komplexer Logarithmus *6 Punkte*

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert man den komplexen Logarithmus durch die Formel

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z).$$

Für $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ nennt man ihn den *Hauptwert des Logarithmus* von z.
Berechnen Sie $\ln z$ für

$$\text{i) } z = 2 - 2\sqrt{3}i \qquad \text{ii) } z = \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2e}\sqrt{3}i \qquad \text{iii) } z = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

2. Klassifizierung von Differentialgleichungen *4+3 Punkte*

a) Bestimmen Sie Typ (homogen – inhomogen) <u>und</u> Ordnung der folgenden Differentialgleichungen.

i) $y' + ax = 0$ ii) $\frac{5}{4}y^{(3)} + \frac{2}{3}y'' = \frac{1}{2}y$

iii) $y' + ay = 0$ iv) $\frac{3}{10}y'' + \frac{2}{5}y' - \sin x = \frac{1}{6}y$

b) Welche der folgenden Differentialgleichungen gehören zur Klasse der linearen Differentialgleichungen 1. oder 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten?

i) $y' + x^2 y = 2x$ ii) $5y'' - 2y' - 4y = 0$

iii) $y^{(4)} + 2xy'' + 3x^2 y' = 0$ iv) $y'' - \sin(x)y = 0$

v) $y'' - \frac{3}{2}y = 2$ vi) $2y'' - y' + x^9 = 0$

3. Differentialgleichungen erster Ordnung *3 Punkte*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen erster Ordnung.

i) $2y' + 12y = 0$ ii) $\frac{1}{6}y' = 2y$ iii) $6y' = 3y$

4. Anfangsbedingung *3+2 Punkte*

a) Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktionen $y_1 = \sin(2x)$ und $y_2 = \cos(2x)$ Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ sind. Zeigen Sie, dass auch $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ mit $A, B \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B, so dass $y(x)$ die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ erfüllt.

5. Exponentialansatz *6 Punkte*

Lösen Sie die Differentialgleichungen mit Hilfe des Exponentialansatzes. Geben Sie stets die allgemeine Lösung an. Geben Sie bei komplexen Lösungen zusätzlich die reelle Lösung an.

i) $2y'' + \frac{1}{2}y = 0$, ii) $\frac{1}{2}y'' + y' - \frac{1}{2}y = 0$, iii) $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Hinweis: Der Exponentialansatz wird für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verwendet und lautet $y(x) = e^{\lambda x}$. Setzen Sie den Ansatz in die Differentialgleichung ein und lösen Sie dann die algebraische Gleichung $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erhalten Sie dann als

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{C}.$$