UNIVERSITÄT LEIPZIG
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Physikalisches Grundpraktikum

M 10 „Resonanz und Phasenverschiebung bei der mechanischen Schwingung“

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Frequenz der freien gedämpften Schwingung f_d und die Abklingkonstante δ eines Drehpendels bei acht verschiedenen Dämpfungen. Stellen Sie ω_d als Funktion von δ graphisch dar und vergleichen Sie mit der Theorie.

2. Messen Sie die Resonanzkurve des Drehpendels, sowie die Phasenverschiebung zwischen Anregung und Pendelscheibe bei einer vorgegebenen Dämpfung. Vergleichen Sie die Werte mit den theoretischen Gleichungen und bestimmen Sie Resonanzfrequenz und Dämpfungskonstante.

Literatur

Physikalisches Praktikum, 14. Auflage, Hrsg. W. Schenk, F. Kremer, Mechanik, 2.3
W. Demtröder, *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme*, Springer, Berlin

Zubehör

Pohl’sches Drehpendel mit Winkelsensoren, Interfacesystem, Laptop

Schwerpunkte zur Vorbereitung
- Drehmoment, Drehimpuls
- Trägheitsmoment einer Scheibe
- Drehpendel, Bewegungsgleichung, Eigenfrequenz, Dämpfungskonstante, Frequenz der freien Schwingung, logarithmisches Dekrement
- Resonanzkurve, Resonanzfrequenz, Phasenverschiebung

Grundlagen

In diesem Versuch werden freie und erzwungene Drehschwingungen an einem Drehpendel nach *Pohl* untersucht. Das Drehpendel hat eine Eigenfrequenz, die vom Direktionsmoment der Feder und seinem Trägheitsmoment abhängt. Bei Erhöhung der Dämpfung beobachtet man im Fall der freien gedämpften Schwingung neben dem stärkeren Abklingen der Amplitude mit der Zeit auch eine geringe Abnahme der Frequenz der freien Schwingung. Im Fall eines periodisch angetriebenen Drehpendels kann der Resonanzfall bei Gleichheit der Erreger- und der Resonanzfrequenz realisiert werden. Die maximale Amplitude ist im Resonanzfall eine Funktion der Dämpfung.
Diese Grundlagen werden im Folgenden nochmals hergeleitet.

Drehpendel ohne externen Antrieb
Wird das Pendel um einen Winkel φ ausgelenkt und dann losgelassen, führt es eine gedämpfte Drehschwingung um die Ruhelage φ_0 aus. Diese Schwingung nennt man gedämpfte Eigenschwingung des Systems. Die Bewegungsgleichung des Systems kann aus dem Gleichgewicht der Drehmomente

$$M_\mathrm{T} = M_\mathrm{F} + M_\mathrm{D} \qquad (1)$$

mit

$M_\mathrm{T} = J\ddot{\varphi}$ Trägheitsdrehmoment

$M_\mathrm{F} = -D\,\varphi$ Rücktreibendes Drehmoment der Feder

$M_\mathrm{D} = -\gamma\,\dot{\varphi}$ Dämpfungsmoment

(Trägheitsmoment *J*, Direktionsmoment der Feder *D*, Dämpfungskoeffizient γ) hergeleitet werden. Durch Einsetzen erhält man die Differentialgleichung für die gedämpfte Eigenschwingung des Pendels:

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = 0 \qquad (2a)$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^{\,2}\varphi = 0 \;. \qquad (2b)$$

($\gamma / J = 2\delta$, $\omega_0^{\,2} = D / J$, $\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}$)

Gleichung (2b) ist eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bei der Lösung solcher Differentialgleichungen unterscheidet man drei Fälle:

1. $\delta^2 > \omega_0^{\,2}$: Kriechfall (starke Dämpfung) (3)
2. $\delta^2 = \omega_0^{\,2}$: aperiodischer Grenzfall (4)
3. $\delta^2 < \omega_0^{\,2}$: Schwingungsfall (schwache Dämpfung). (5)

Die Größe ω_0 beschreibt die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Pendels, ω_d die Kennkreisfrequenz des gedämpften Pendels. $f_d = \omega_d / (2\pi)$ wird hier als Kennfrequenz oder Frequenz der freien Schwingung bezeichnet.
Die Eigenkreisfrequenz ω_0 hängt nicht von der Schwingungsamplitude ab. Dieses Ergebnis ist eine wichtige Besonderheit harmonischer Oszillatoren, die stets durch lineare Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Als Lösung für den gedämpften Fall erhält man eine exponentiell abklingende Schwingung, die durch die Abklingzeit $\tau = \delta^{-1}$ und die Kennfrequenz $f_\mathrm{d} = \omega_\mathrm{d} / 2\pi$ charakterisiert wird. Die Kennkreisfrequenz eines gedämpften Oszillators ist kleiner als die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems. Die Dämpfungskonstante δ bzw. das logarithmische Dekrement Λ lassen sich experimentell leicht über die zeitliche Abnahme der Schwingungsamplitude $\varphi(t)$ bestimmen:

$$\Lambda = \delta T_\mathrm{d} = \ln\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T_\mathrm{d})}\right) \text{ (Periodendauer } T_\mathrm{d} = 2\pi / \omega_\mathrm{d}\text{).} \qquad (6)$$

Drehpendel mit externem Antrieb

Wird über den Antrieb zusätzlich ein äußeres periodisches Drehmoment $M_0 \sin(\omega t)$ auf das Pendel gegeben, erhält man eine erzwungene Schwingung. Nach einer Einschwingzeit ist die Frequenz des Pendels mit der Frequenz ω des Antriebs identisch.

Die Bewegungsgleichung lautet jetzt

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \sin(\omega t) \tag{7}$$

Das ist eine inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7) setzt sich aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen. Eine partikuläre Lösung erhält man mit dem Ansatz

$$\varphi_p(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \theta) \tag{8}$$

Für die Amplitude ergibt sich

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{J^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} = \frac{M_0 / J}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \tag{9}$$

wobei ω die Antriebsfrequenz und $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ die Eigenfrequenz des nicht angetriebenen, ungedämpften Systems sind. Für die Phasendifferenz θ folgt:

$$\tan\theta(\omega) = -\frac{\omega\gamma}{J\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} = -\frac{2\omega\delta}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (7) erhält man durch Addition dieser Lösung zur Lösung der Differentialgleichung nach Gl. (2) mit

$$\varphi(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \theta) + Ce^{-\delta t}\cos(\omega_d - \alpha). \tag{11}$$

Aus dieser Lösung folgt, dass die Schwingungen des ungestörten und des angetriebenen Systems sich einander überlagern. Nach einer Einschwingzeit verschwindet der Term mit der Kennkreisfrequenz ω_d aufgrund der exponentiellen Dämpfung. Das Pendel schwingt nun nur noch mit der Kreisfrequenz ω des Antriebs, allerdings mit einer Phasenverschiebung θ gegenüber der Erregerschwingung.

Die Grenzwerte von Gl. (9) sind:

$$A(0) = \frac{M_0}{J\,\omega_0^2} = \frac{M_0}{D} \quad ; \quad A(\infty) = 0.$$

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung erreicht bei der Resonanzkreisfrequenz ihren Maximalwert. Minimieren des Nenners von Gl. (9) ergibt

$$\left((\omega^2 - \omega_0^2) + 2\delta^2\right)\omega = 0 \;.$$

Die Resonanzkreisfrequenz ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad && \delta < \omega_0 / \sqrt{2} \\ \omega_R &= 0 \qquad && \delta > \omega_0 / \sqrt{2} \end{aligned} \;. \tag{12}$$

Die Amplitude bei der Resonanzkreisfrequenz ist

$$\begin{aligned} A(\omega_R) &= A(0)\frac{\omega_0^2}{2\delta\omega_d} \qquad && \delta < \omega_0 / \sqrt{2} \\ A(\omega_R) &= A(0) \qquad && \delta > \omega_0 / \sqrt{2} \end{aligned} \;. \tag{13}$$

Für schwache Dämpfungen (und nur dann) gilt:

$$\omega_R \approx \omega_0 \approx \sqrt{\frac{D}{J}} \quad .$$

Die Darstellung $A(\omega)$ in Abhängigkeit von ω ergibt die Resonanzkurve (Abb. 1). Man erkennt, dass der Graph der Resonanzkurve bezüglich der Resonanzfrequenz nicht symmetrisch ist. Als Halbwertsbreite $\Delta\omega$ definiert man die Differenz zwischen den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2, bei denen die Resonanzamplitude auf den Wert $A(\omega_1)=A(\omega_2)=A\left(\omega_R\right)/\sqrt{2}$ abgenommen hat [bzw. $A^2(\omega_1)=A^2(\omega_2)=A^2\left(\omega_R\right)/2$, dies entspricht den Leistungen $P(\omega_1)=P(\omega_2)=P_{max}/2$]. Die Halbwertsbreite lässt sich nur für Dämpfungen definieren, die kleiner sind als $\delta < \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\omega_0 \approx 0.38268\omega_0$, da der Resonanzkurvenzweig auf der Niederfrequenzseite sonst stets größer als $A(\omega_R)/\sqrt{2}$ ist. In diesem allgemeinen Fall gilt

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_R^2 \pm 2\delta\sqrt{\omega_R^2+\delta^2}} \quad . \tag{14}$$

Im Fall schwacher Dämpfungen $\delta \ll \omega_0$ erhält man $\omega_{1,2} \approx \omega_R \pm \delta$ und für die Halbwertsbreite

$$\Delta\omega = 2\delta \quad \text{bzw.} \quad \tau\,\Delta\omega = 2\,. \tag{15}$$

Gleichung (15) beschreibt die so genannte Unschärfe zwischen Frequenz und \`Lebensdauer´ eines gedämpften, linearen Oszillators. Große Dämpfungen haben eine kurze \`Lebensdauer´ der Schwingung zur Folge und verursachen breite Resonanzkurven. Sehr schmale Resonanzkurven entsprechen Systemen mit einer großen \`Lebensdauer´ der Schwingung, bei denen die Dämpfung gering ist.

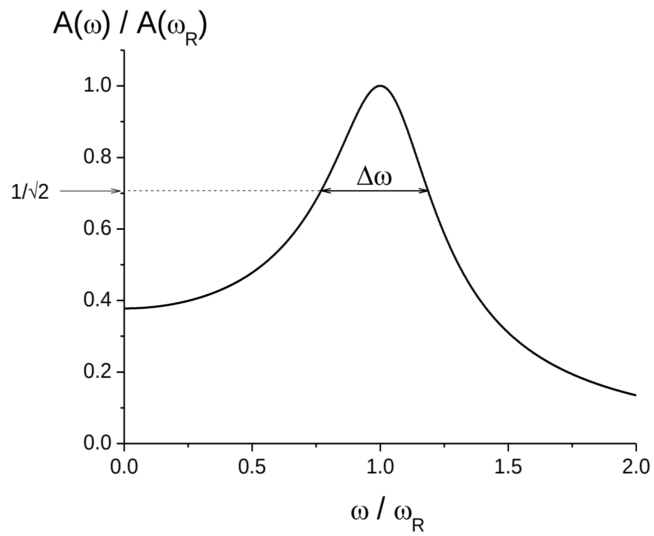

Abb. 1 Resonanzkurve

Die Dämpfung beschreibt die Dissipation der Energie, die vom Antrieb in das System eingebracht wird. Je kleiner die Dämpfung des getriebenen Oszillators ist, umso größer wird im Resonanzfall seine Schwingungsamplitude. Eine weitere wichtige Kenngröße zur Beschreibung des Resonanzverhaltens ist die Güte Q mit $Q=\omega_0/\Delta\omega=\omega_0/2\delta$.

Die Phasenverschiebung ist nach Gl. (10) negativ, d.h. die Auslenkung eilt der Anregung stets hinterher. Explizit lässt sich die Phasenverschiebung schreiben als

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= -\arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) && \omega<\omega_0 \\ \theta(\omega) &= -\pi+\arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right) && \omega>\omega_0 \end{aligned} \quad . \qquad (16)$$

Als Funktion der Frequenz hat die Phase ihren Wendepunkt bei der Eigenfrequenz ω_0, nicht bei der Resonanzfrequenz ω_R . An diesem Punkt hat sie den Wert $\theta(\omega_0)=-\frac{\pi}{2}$.

Hinweise zur Versuchsdurchführung und Auswertung

Zu Aufgabe 1

Nehmen Sie die Abklingkurven für verschiedene Stromstärken der Wirbelstrombremse zwischen 400 mA und 1200 mA auf. Bestimmen Sie die Kreisfrequenz der freien Schwingung ω_d und die Dämpfungskonstante δ. Schätzen Sie den Fehler dieser Größen ab. Tragen Sie ω_d^2 gegen δ^2 auf und vergleichen Sie mit der Theorie.

Zu Aufgabe 2

Messen Sie die Frequenzabhängigkeit der Resonanzkurve und Phasenverschiebung bei einem festen Wert der Stromstärke in der Wirbelstrombremse. Die Phasenverschiebung lässt sich aus der zeitlichen Verschiebung Δt zwischen anregender und Pendel-Schwingung bestimmen als $\theta=\omega\Delta t$. Stellen Sie die Daten graphisch dar und ermitteln Sie die Resonanzfrequenz ω_R und Dämpfungskonstante δ durch Anpassung der Theoriekurven an die Daten.

Drehpendel

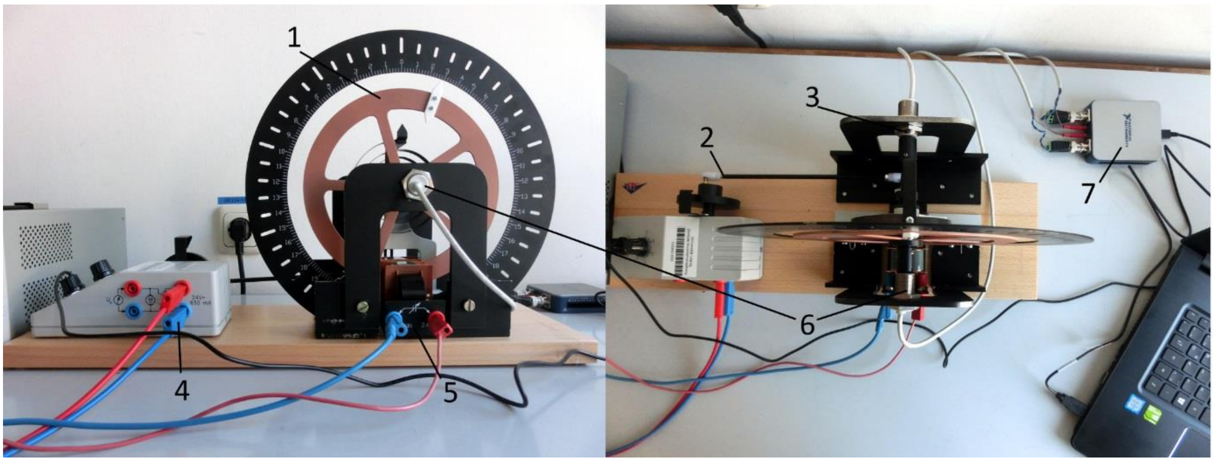

Abb. 4
Drehpendel nach *Pohl*
1 Resonator (Kupferscheibe)
2 Exzenter und Getriebestange für den Antrieb
3 Drehwinkelsensor für die Anregung
4 Anschluss für den Motor (0 – 24 VDC)
5 Anschluss für die Wirbelstrombremse (0 - 2 A)
6 Drehwinkelsensor für den Resonator
7 Analog-Digital-Wandler mit integriertem Vorverstärker

Software des Interfacesystems