M18 „Schallmessungen an Festkörpern“

Aufgaben

1. Ermitteln Sie in einem Vorversuch die Frequenz der freien gedämpften Schwingung (Biegeschwingung) eines einseitig eingespannten Metallstabs mit einem Oszilloskop und einem Frequenzzähler.

2. Berechnen Sie die Resonanzfrequenzen für höhere Ordnungen (n = 2 bis n = 10) unter Verwendung der *bei Aufgabe 1* bestimmten Frequenz. Messen Sie die Resonanzfrequenzen des Biegeschwingers für die Ordnungen n = 2 bis n = 10. Tragen Sie die Resonanzfrequenzen über m_n^2 auf, und ermitteln Sie aus dem Anstieg des Graphen den Elastizitätsmodul E des Metalls.

3. Nehmen Sie für eine Resonanzfrequenz oberhalb 400 Hz die Resonanzkurve auf. Ermitteln Sie den Abklingkoeffizienten δ, die Güte Q und das logarithmische Dekrement Λ.

4. Berechnen Sie die Laufstrecke für die Schallwelle, bei der die Anfangsamplitude der Welle auf den $1/e$-ten Anteil abgeklungen ist.

Zusatzaufgabe: Messen Sie verschiedene Resonanzfrequenzen von Dehnungswellen in einem Metallstab, und bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Dehnungswelle und den Elastizitätsmodul des Materials.

Literatur

Physikalisches Praktikum, 13. Auflage, Hrsg. W. Schenk, F. Kremer, Mechanik, 4.0, 4.1
Grundwissen Experimentalphysik, H. Pfeifer, H. Schmiedel, 5.2
Gerthsen Physik, D. Meschede, 22. Auflage, 4.4.3

Zubehör

Schallmessplatz mit Biegeschwinger (flacher Stahlstab), Anordnung zur Messung von Dehnungswellen in langen Metallstäben

Schwerpunkte zur Vorbereitung

- Mechanische Wellen, Grundbegriffe, Arten, Kenngrößen, Erzeugung
- Wellengleichung, harmonische ebene Wellen
- Schallwellen, Dehnungs- und Biegewellen, Ausbreitungsgeschwindigkeit
- Stehende Wellen, Eigenschwingungen, ′Knoten′ und ′Bäuche′
- Resonanz, erzwungene gedämpfte Schwingung, Resonanzkurve, Dämpfungsgrößen
- Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Bemerkungen

Biegewellen in Metallstäben

Bei den im Versuch untersuchten *Biegewellen* lautet die Bewegungsgleichung[1]

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{E\, I_\eta}{\rho\, A}\,\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\,. \tag{1}$$

ζ ist die Schwingungsamplitude. I_η bezeichnet das Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnitts A. Die Eigenfrequenzen f_n der Biegeschwingungen ergeben sich zu

$$f_n = \frac{m_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E\, I_\eta}{\rho\, A}}\,. \tag{2}$$

Dabei sind l die Länge des einseitig eingespannten Metallstabs, I_η das Flächenträgheitsmoment des Stabs (im Versuch rechteckiger Stabquerschnitt $A = ab$ mit $I_\eta = a \cdot b^3/12$), E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Materials. Die Werte m_n sind Lösungen der transzendenten Gleichung $\cos m_n \cosh m_n = -1$ mit m_1=1,875, m_2=4,694 und m_3=7,855. Für Ordnungen $n > 3$ lässt sich der Wert für m_n mit ausreichender Genauigkeit durch die Gleichung $m_n = (2n-1)\pi/2$ berechnen.

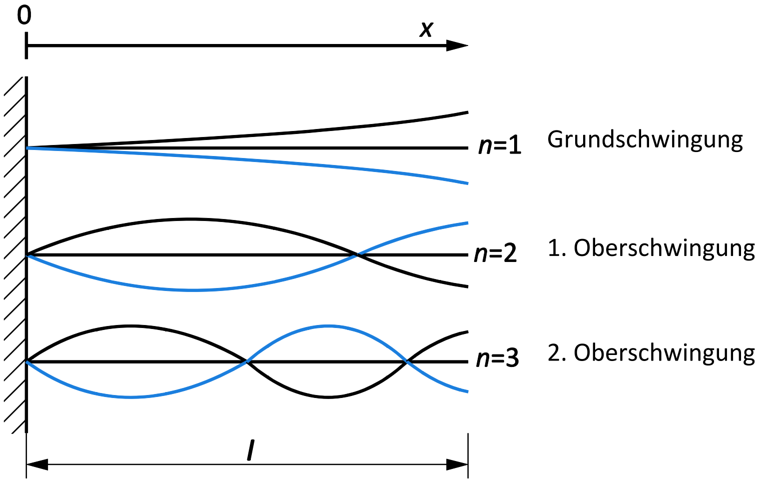


Abb. 1 Biegewelle als stehende Welle (ein Ende fest, ein Ende frei)

Das Quadrat der Schwingungsamplitude A genügt der Gleichung

$$A^2 = \frac{a_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\,, \tag{3}$$

siehe Abb. 2. Dabei sind ω die anregende Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi f$), ω_0 die Eigenkreisfrequenz und ω_{res} die Resonanzkreisfrequenz, bei der die Schwingungsamplitude maximal wird, wobei gilt:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,. \tag{4}$$

[1] A. Budo, Theoretische Mechanik, Dt. Verl. d. Wiss., 11. Auflage, Berlin 1987

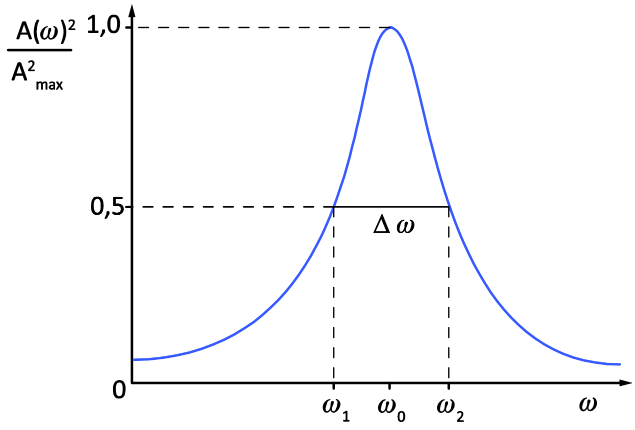


Abb. 2 Resonanzkurve

In Abb. 3 ist das Zeitverhalten der Amplitude einer freien, schwach gedämpften Schwingung dargestellt. Es lässt sich durch die Gleichung $Y = Y_0 \exp(-\delta t) \sin \omega_d t$ $(t > 0)$ beschreiben mit

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad . \tag{5}$$

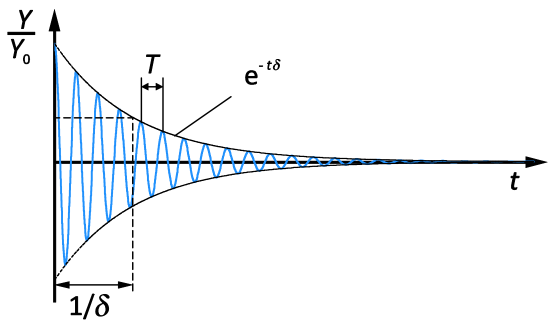


Abb. 3 Zur gedämpften Oszillation (Abklingverhalten)

Aus Abb. 3 folgt für das logarithmische Dekrement Λ (natürlicher Logarithmus des Verhältnisses von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Maxima, Periodendauer T)

$$\Lambda = \ln \frac{Y_n}{Y_{n+1}} = \delta T \tag{6}$$

und mit Abb. 2 folgt für die Dämpfungskonstante δ

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{2} \, . \tag{7}$$

Die Phasengeschwindigkeit der Biegewellen c_{Bp} ist frequenzabhängig (Schalldispersion) und genügt

$$c_{Bp} = \sqrt{\omega} \; \sqrt[4]{\frac{EI_\eta}{\rho A}} \, . \tag{8}$$

Mit der mittleren Wellenlänge

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n-1} \tag{9}$$

und $c_{Bp} = \lambda_n f_n$ erhält man

$$c = \frac{8\, m_n^2}{\pi\,(2n-1)^2} \sqrt{\frac{E\, I_\eta}{\rho\, A}} \, \frac{1}{\lambda_n} \, . \tag{10}$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Biegewellen folgt zu

$$c_{Bg} = c_{Bp} - \lambda \frac{dc_{Bp}}{d\lambda} = 2c_{Bp}\,. \qquad (11)$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeit c_{Bp} für denjenigen Fall, für den Sie die Resonanzkurve aufgenommen haben, um die Größenordnung der Geschwindigkeit der Biegewellen in Metallen kennen zu lernen. Die Abklingkonstante α erhält man aus der Dämpfung δ gemäß $\alpha = \delta/c_{Bp}$.

Dehnungswellen in Metallstäben (Länge viel größer als Querdimension)

Im einfachsten (eindimensionalen) Fall kann die Ausbreitung in Richtung einer Koordinate x mit einer linearen Wellengleichung des folgenden Typs beschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,. \qquad (12)$$

Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, für die unendlich viele Lösungen $\xi = f(x-ct) + g(x+ct)$ existieren. Die Größe c ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein bestimmter Schwingungszustand (eine Phase) fortpflanzt mit $c = \sqrt{E/\rho}$, wobei E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Materials sind. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen, dass der Stab an einem Ende frei und am anderen eingespannt ist, erhält man für die Eigenfrequenzen f_n (stehende Wellen) von Dehnungsschwingungen:

$$f_n = (2n-1)\frac{c}{2l}\,. \qquad (13)$$

Im Falle eines an beiden Enden freien Stabes ergeben sich die Eigenfrequenzen nach der Gleichung

$$f_n = n\frac{c}{2l}\,. \qquad (14)$$

Dabei gilt n = 1 für die Grundschwingung und n > 1 (n ganzzahlig) für die Oberschwingungen.

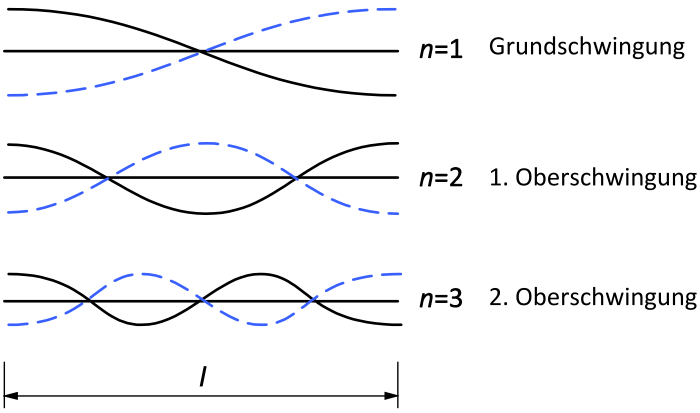


Abb. 4 Dehnungswelle (Longitudinalschwingung eines Stabes) als stehende Welle (beide Enden frei)

Messplatz

Der Messplatz (s. Abb. 5) zur Anregung und zum Nachweis von Biegeschwingungen besteht aus folgenden Grundgeräten:

(1) Generator zur Schwingungsanregung mit variabler Ausgangsfrequenz und -spannung
(2a,2b) Schallwandler
(2) Stahlstab
(3) Hochpassglied zur Beseitigung niederfrequenter Signale
(4) Messverstärker zur Verstärkung der Schallwandlerspannung
(5) Speicher-Oszilloskop zur Kontrolle des Ausgangssignals des Generators und des verstärkten Sensorsignals
(6) AC-Millivoltmeter zur Einstellung der Resonanz und zur Aufnahme der Resonanzkurve

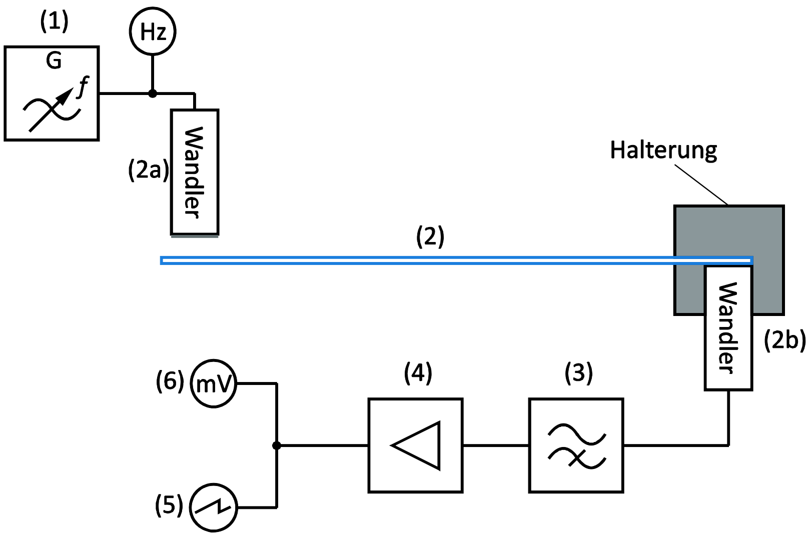


Abb. 5 Messplatz für Biegeschwingungen (schematisch)

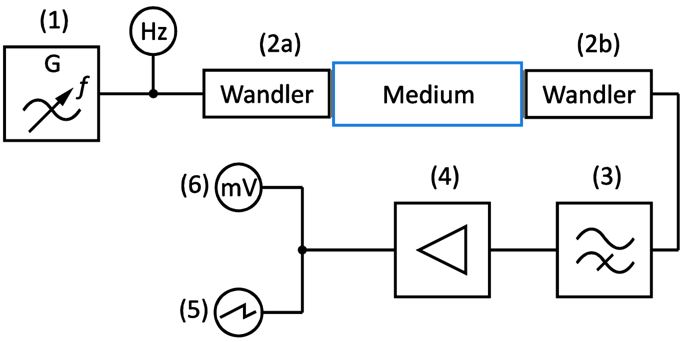
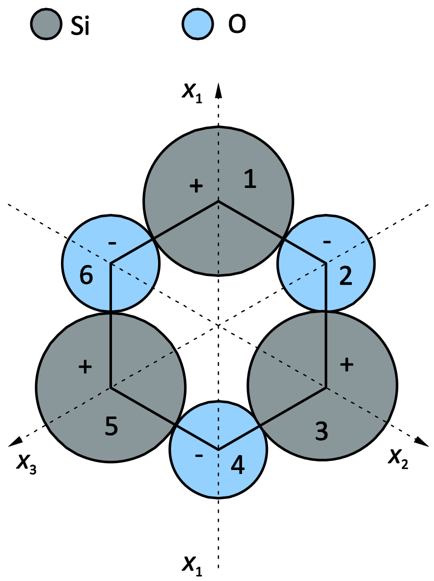


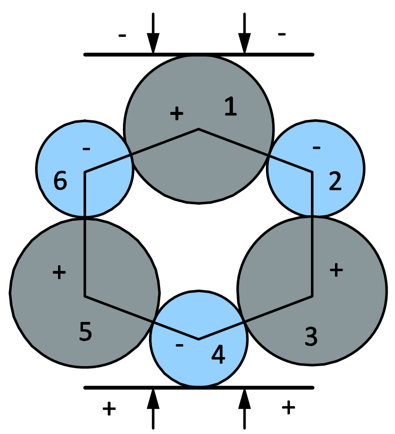
Abb. 6 Messplatz für Dehnungsschwingungen (schematisch)

Der flache Stahlstab wird durch Variation der Generatorfrequenz über das magnetische Wechselfeld einer Spule (2a) zu Schwingungen angeregt. Der piezoelektrische Wandler (2b) wandelt die mechanischen Schwingungen in elektrische Spannungen um, die durch einen Verstärker (4) zusätzlich verstärkt werden. Im Resonanzfall hat die mit dem Oszilloskop bzw. dem Voltmeter angezeigte Spannung ihren Maximalwert. Ausgehend von der Grundschwingung (n = 1) bei einigen Hz werden die Resonanzfrequenzen ab der zweiten bis zur 10. Ordnung gemessen. Oberhalb 400 Hz ist der Hochpass (3) einzuschalten, um niederfrequente Störungen zu beseitigen. Die dabei auftretende Dämpfung des Signals kann durch die Erhöhung der Verstärkung bzw. der Ausgangsspannung am Funktionsgenerator ausgeglichen werden. Die Resonanzen sind sehr schmalbandig, so dass mit Hilfe des Feinreglers des Generators die Frequenzvariation sehr gefühlvoll vorgenommen werden muss.

Zur Berechnung des *E*-Moduls über den mittleren Anstieg des Graphen aus der Darstellung der Resonanzfrequenz f_n in Abhängigkeit von m_n^2 benötigt man die Dichte ρ = (7860 $\pm$ 40) kgm^{-3}, die Dicke b = (0,479 $\pm$ 0,002) mm sowie die Länge l des Stabes. Letztere kann am Längenmaßstab des Stabes abgelesen werden. Die Aufnahme der Resonanzkurve erfolgt für eine gut ausmessbare höhere Ordnung. Die Signalspannung im Maximum der Resonanzkurve soll bis auf einen Wert verstärkt werden, bei dem in einem entsprechend ausgewählten Messbereich die volle Skala ausgenutzt wird.

Piezoelektrizität





Der piezoelektrische Effekt wurde 1880 von Pierre Curie entdeckt. Bei einigen Kristallen, wie z.B. Quarz oder Bariumtitanat, kann man durch mechanische Kräfte auf gegenüberliegende Seiten des Kristalls eine elektrische Spannung erzeugen. Druck auf diese Flächen bewirkt eine Ladungsverschiebung im Kristall. Entgegengesetzte Ladungen sammeln sich so an den gegenüberliegenden Kristallflächen.

Das bekannteste Material mit Piezoeigenschaften ist Quarz (SiO_2), bei dem jedes Si-Atom tetragonal von Sauerstoff-Atomen umgeben ist. Ein Quarzkristall hat ein hexagonales Gitter, das aus negativ geladenen Sauerstoff- und positiv geladenen Silizium-Ionen besteht.

Eine in Richtung Grundfläche-Spitze (kristallographische Richtung: [111]) wirkende Kraft verformt nun diese Tetraeder derart, dass die zusammengedrückten Tetraeder elektrisch polarisiert sind und auf den Oberflächen des Kristalls (in [111]-Richtung) eine Netto-Ladung auftritt.

Im unbelasteten Zustand (oberes Bild) sind die Ionen so angeordnet, dass sich ihre Ladungen an den Oberflächen des Kristalls gerade gegenseitig ausgleichen. Presst man den Kristall in der x_1-Richtung zusammen, so wird das vorher regelmäßige Sechseck gestaucht und die Ionenanordnung ist nicht mehr gleichmäßig. Insbesondere erkennt man im unteren Bild, dass an der oberen Oberfläche negative und an der unteren Oberfläche positive Ladungen überwiegen. Verbindet man diese beiden Oberflächen mit Elektroden, so lässt sich eine Spannung entnehmen. Die Stauchung ist hier sehr übertrieben dargestellt. Tatsächlich wird ein solcher Kristall bei Druckbeanspruchung nur im Prozentbereich gestaucht. Es entstehen dabei aber Piezospannungen in der Größenordnung von 1000 V.

Technisch genutzte Materialien, die einen stärkeren Piezo-Effekt als Quarz zeigen, sind Ferroelektrika wie z.B. Bariumtitanat ($BaTiO_3$) oder PZT (Blei-Zirconat-Titanat, $Pb_{1-x}Zr_xTiO_3$), die beide in der Perowskitstruktur kristallisieren. Der Effekt lässt sich auch umkehren: Legt man an die Oberflächen eines geeignet präparierten Quarzkristalls eine Spannung an, so verformt sich der Kristall.