Modul 04-006-1001: **WiSe 2023-2024**
Formale Grundlagen (Logik)

Solutions 7

Excercise 1: Truth tables

- Construct truth tables for the following statements. Note whether any of them are logically equivalent.

(1)

p	q	$(\neg q)$	$(p \vee (\neg q))$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

(2)

p	q	$(\neg p)$	$((\neg p) \wedge q)$	$(\neg((\neg p) \wedge q))$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

(3)

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$((p \leftrightarrow q) \wedge p)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0

(4)

p	q	r	$(\neg r)$	$(q \vee (\neg r))$	$(p \rightarrow (q \vee (\neg r)))$	$((p \rightarrow (q \vee (\neg r))) \wedge (p \rightarrow (q \vee (\neg r))))$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

(5)

p	q	$(p \rightarrow q)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p)$	$(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

- $(p \vee (\neg q)) \Leftrightarrow (\neg((\neg p) \wedge q))$

Excercise 2: Tautology, contradiction, contingency

- Let p, q, and r be atomic statements. Which of the following are tautologies, contradictions, or contingent statements?

(6)
a. $(p \vee (\neg p))$ tautology
b. $(p \vee q)$ contingent
c. $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r))$ tautology
d. $((\neg p) \wedge (\neg(p \rightarrow q)))$ contradiction
e. $((p \vee r) \rightarrow (\neg p))$ contingent

Excercise 3: Definition of connectives

- Certain of the logical connectives can be defined in terms of others. Example: $(p \to q)$ can be defined as $((\neg p) \vee q)$ (i.e. $\to$ is expressible in terms of $\neg$ and $\vee$), since the two statements are logically equivalent.
- Define $\to$ in terms of $\wedge$ and $\neg$.

(7) $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q) \Leftrightarrow (\neg(p \wedge (\neg q)))$

- Define $\wedge$ in terms of $\vee$ and $\neg$

(8) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg((\neg p) \vee (\neg q)))$

- Define $\leftrightarrow$ in terms of $\to$ and $\wedge$.

(9) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$

- Show how the five connectives can be reduced to $\wedge$ and $\neg$.

(10) a. $(p \to q)$: see above
b. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p)) \Leftrightarrow (((\neg p) \vee q) \wedge (((\neg q) \vee p))) \Leftrightarrow$
$((\neg(p \wedge (\neg q))) \wedge (\neg(q \wedge (\neg p))))$
c. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$
d. $(p \wedge q)$ and $(\neg p)$ are already reduced.

Excercise 4: Laws of statement logic

- Prove the following equivalence: $((p \wedge q) \vee p) \Leftrightarrow p$.

(11)

p	q	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \vee p)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

- Use the laws of statement logic (and, possibly, the equivalence you proved previously) to reduce each of the following statements to the simplest equivalent statement.

(12) a. $((\neg p) \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Distr.)
b. $(((\neg p) \vee p) \wedge ((\neg p) \vee q)) \Leftrightarrow$ (Comm.)
c. $((p \vee (\neg p)) \wedge ((\neg p) \vee q)) \Leftrightarrow$ (Compl.)
d. $(T \wedge ((\neg p) \vee q)) \Leftrightarrow$ (Comm.)
e. $(((\neg p) \vee q) \wedge T) \Leftrightarrow$ (Ident.)
f. $(\neg p) \vee q) \Leftrightarrow$ (Cond.)
g. $(p \to q)$

(13) a. $(((\neg p) \wedge q) \vee (\neg(p \vee q))) \Leftrightarrow$ (DeMorgan)
b. $(((\neg p) \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))) \Leftrightarrow$ (Distr.)
c. $((((\neg p) \wedge q) \vee (\neg p)) \wedge (((\neg p) \wedge q) \vee (\neg q))) \Leftrightarrow$ (Distr.)
d. $((((\neg p) \wedge q) \vee (\neg p)) \wedge (((\neg p) \vee (\neg q)) \wedge (q \vee (\neg q)))) \Leftrightarrow$ (Compl.)
e. $((((\neg p) \wedge q) \vee (\neg p)) \wedge (((\neg p) \vee (\neg q)) \wedge T)) \Leftrightarrow$ (Ident.)
f. $((((\neg p) \wedge q) \vee (\neg p)) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))) \Leftrightarrow$ (11)
g. $((\neg p) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))) \Leftrightarrow$ (Distr.)

h. $(((\neg p) \wedge (\neg p)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))) \Leftrightarrow$ (Idemp.)
i. $((\neg p) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))) \Leftrightarrow$ (11)
j. $(\neg p)$

(14) a. $((\neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))) \Leftrightarrow$ (Distr.)
b. $(((\neg p) \wedge (p \wedge q)) \vee ((\neg p) \wedge (p \wedge r))) \Leftrightarrow$ (Assoc. $2\times$)
c. $((((\neg p) \wedge p) \wedge q) \vee (((\neg p) \wedge p) \wedge r)) \Leftrightarrow$ (Comm. $2\times$)
d. $(((p \wedge (\neg p)) \wedge q) \vee ((p \wedge (\neg p)) \wedge r)) \Leftrightarrow$ (Compl. $2\times$)
e. $((F \wedge q) \vee (F \wedge r)) \Leftrightarrow$ (Ident. $2\times$)
f. $(F \vee F) \Leftrightarrow$ (Idemp.)
g. F

(15) a. $(((\neg p) \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow$ (Bicond.)
b. $(((\neg((\neg p) \wedge q)) \wedge (\neg(p \vee q))) \vee (((\neg p) \wedge q) \wedge (p \vee q))) \Leftrightarrow$ (DeMorgan $2\times$)
c. $(((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee (((\neg p) \wedge q) \wedge (p \vee q))) \Leftrightarrow$ (Distr.)
d. $(((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee ((((\neg p) \wedge q) \wedge p) \vee (((\neg p) \wedge q) \wedge q))) \Leftrightarrow$ (Comm.)
e. $(((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee ((p \wedge ((\neg p) \wedge q)) \vee (((\neg p) \wedge q) \wedge q))) \Leftrightarrow$ (Assoc. $2\times$)
f. $(((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee (((p \wedge (\neg p)) \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (q \wedge q)))) \Leftrightarrow$ (Compl.)
g. $(((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee ((F \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (q \wedge q)))) \Leftrightarrow$ (Idemp.)
h. $(((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee ((F \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge q))) \Leftrightarrow$ (Ident. $2\times$)
i. $(((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Distr.)
j. $((((((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge p) \vee (((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge (\neg q))) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Comm.)
k. $(((p \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee (((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge (\neg q))) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Assoc. $2\times$)
l. $((((p \wedge (\neg p)) \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Compl. + Idemp.)
m. $(((F \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Ident. $2\times$)
n. $(((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Distr.)
o. $(((((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee q) \wedge (((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee (\neg p))) \Leftrightarrow$ (11)
p. $(((((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee q) \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow$ (Distr.)
q. $(((((\neg p) \vee q) \wedge ((\neg q) \vee q)) \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow$ (Compl.)
r. $(((((\neg p) \vee q) \wedge T) \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow$ (Ident.)
s. $((((\neg p) \vee q) \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow$ (Distr.)
t. $(((\neg p) \wedge (\neg p)) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (Idemp.)
u. $((\neg p) \vee ((\neg p) \wedge q)) \Leftrightarrow$ (11)
v. $(\neg p)$