

7 Bedeutung und Logik

7.1 Logische Eigenschaften von Sätzen

7.2 Logische Beziehungen zwischen Sätzen

7.3 Logische Beziehungen und Bedeutungsbeziehungen

7.4 Formale Semantik

7.1 Logische Eigenschaften von Sätzen

Ein Satz ϕ ist **logisch wahr** oder eine **Tautologie** gdw
 ϕ in jedem möglichen ÄK und damit notwendig wahr ist.

Beispiele:

(1) *Paul ist klug oder nicht klug.*

$$klug'(Paul') \vee \neg klug'(Paul')$$

(2) *Jede Frau ist eine Frau.*

(3) *Zwei plus zwei ist gleich vier.*

(4) *Ein Dackel ist ein Hund.*

? Was sind die logischen Formen von (2) und (4)?

(1) *Paul ist klug oder nicht klug.*

$$\textit{klug}'(\textit{Paul}') \vee \neg \textit{klug}'(\textit{Paul}')$$

(2) *Jede Frau ist eine Frau.*

- Satz (1) und (2) sind allein wegen ihrer logischen Form, d.h. aus Gründen der **Logik wahr**.

(3) *Zwei plus zwei ist gleich vier.*

- Satz (3) ist aus Gründen der **Mathematik wahr**.

(4) *Ein Dackel ist ein Hund.*

- Satz (4) ist auf Grund einer **Bedeutungsbeziehung**, genauer: der Hyponymie-Beziehung, zwischen den Ausdrücken *Dackel* und *Hund* **wahr**.

Unter einem strengeren Blickwinkel sind nur Sätze wie (1) und (2) logisch wahr.

Deshalb wird häufig zwischen solchen logisch wahren Sätzen im engeren Sinne und analytisch wahren Sätzen unterschieden.

Analytisch wahre Sätze (oder logisch wahre Sätze im weiteren Sinne) sind allein wegen ihrer syntaktischen Struktur und der Bedeutung der in ihnen vorkommenden Ausdrücke, unabhängig vom ÄK wahr.

Der Philosoph und Logiker Rudolf Carnap (1891 - 1970) nahm an, dass analytisch wahre Sätze, die nicht ausschließlich auf Gesetzen der Logik oder Mathematik beruhen, auf Grund von **Bedeutungspostulaten** gelten.

Bedeutungspostulate (BP) sind Konventionen mit Bezug auf die Bedeutung von Ausdrücken.

Sie **gelten** mit analytischer Notwendigkeit (\Box : „es ist analytisch notwendig, dass“).

Beispiele:

BP 1: $\Box \forall x [Junggeselle'(x) \leftrightarrow \neg verheiratet'(x) \wedge erwachsen'(x) \wedge männlich'(x) \wedge Mensch'(x)]$

BP 2: $\Box \forall x [Dackel'(x) \rightarrow Hund'(x)]$

\Rightarrow Basis für die analytische Wahrheit von Satz (4)

Ein Dackel ist ein Hund.

Analytisch bzw. logisch wahre Sätze enthalten keine spezielle Information über einzelne Situationen; sie sind also nicht informativ.

Von ihnen werden synthetisch wahre Sätze unterschieden, die nur deshalb wahr sind, weil sie auf die Situation im gegebenen ÄK zutreffen.

Sie liefern damit **spezielle Information** über die betreffende Situation.

Es ist nicht immer leicht zu entscheiden, ob Sätze wegen der Bedeutung der in ihnen vorkommenden Ausdrücke gelten oder nicht.

Welche der folgenden Sätze sind logisch (bzw. analytisch) wahr?
Worauf gründet sich dies jeweils?

- (1) *Ein Junggeselle ist unverheiratet.*
- (2) *Jeder Mensch wird sterben.*
- (3) *Dieser Dackel ist ein Hund.*
- (4) *Rot ist eine Farbe.*
- (5) *Ein Vogel kann fliegen.*
- (6) *Nur Frauen können schwanger werden.*

Ein Satz ϕ ist **logisch falsch** oder eine **Kontradiktion** gdw ϕ in **jedem** möglichen ÄK und damit **notwendig falsch** ist.

Beispiele:

- (1) *Paul ist klug und nicht klug.*
- (2) *Es gibt eine Frau, die keine Frau ist.*
- (3) *Zwei plus zwei ist gleich fünf.*
- (4) *Ein Junggeselle ist verheiratet.*

? Was sind die logischen Formen von (2) und (4)?

? Worauf gründet sich jeweils die Kontradiktion?

Logisch falsche Sätze sind allein wegen ihrer syntaktischen Struktur und der Bedeutung der in ihnen vorkommenden Ausdrücke, unabhängig vom ÄK falsch.

Ein Satz ϕ ist **kontingent** gdw ϕ weder logisch wahr noch logisch falsch ist, d.h. wenn er je nach ÄK sowohl wahr als auch falsch sein kann.

Beispiele:

- (1) *Paul ist klug.*
- (2) *Einige Frauen sind blond.*
- (3) *Ein Hund bellt.*
- (4) *Jeder Junggeselle darf heiraten.*

Streng genommen können nur **kontingente** Sätze eine **Information** über die Welt liefern.

Wenn nichtkontingente Sätze tatsächlich verwendet werden, um etwas über die im ÄK gegebene Situation auszusagen, sorgt das Prinzip der kontextangemessenen Interpretation dafür, dass sie zu kontingenten Sätzen uminterpretiert werden.

7.2 Logische Beziehungen zwischen Sätzen

7.2.1 Logische Implikation

Die logische Implikation oder Folgerung ist die grundlegende logische Beziehung zwischen Sätzen.

Ein Satz ϕ **impliziert logisch** einen Satz ψ bzw. ψ **folgt logisch aus** ϕ gdw in jedem möglichen ÄK gilt: Wenn ϕ wahr ist, dann ist auch ψ wahr.

Notation: $\phi \Rightarrow \psi$ (alternativ: $\phi \vDash \psi$)

Beispiele:

- (1) *Paul ist klug und faul. \Rightarrow Paul ist klug.*
- (2) *Jeder Student lacht. \Rightarrow Ein Student lacht.*
- (3) *Carla ist verheiratet. \Rightarrow Carla ist nicht ledig.*
- (4) *Emil ist Junggeselle. \Rightarrow Emil ist unverheiratet.*

? Worauf gründet sich jeweils die logische Implikation?

Logische Implikation ist Denotationseinschluss.

$\phi \Rightarrow \psi$ gdw $[[\phi]] \subseteq [[\psi]]$, d.h. ϕ impliziert logisch ψ gdw die Denotation von ϕ eine unechte Teilmenge der Denotation von ψ ist.

Beispiel:

Jeder Student lacht. \Rightarrow Ein Student lacht.

gdw

$\{s \mid \text{Jeder Student lacht in } s\} \subseteq \{s \mid \text{Ein Student lacht in } s\}$

Hyponymie ist eine mögliche Basis von logischer Implikation.

Wenn α hyponym zu β ist, dann gilt:

$x \text{ ist ein}(e) \alpha \Rightarrow x \text{ ist ein}(e) \beta$ und

$x \text{ ist ein}(e) \beta \not\Rightarrow x \text{ ist ein}(e) \alpha$

d.h. $\llbracket x \text{ ist ein}(e) \alpha \rrbracket \subset \llbracket x \text{ ist ein}(e) \beta \rrbracket$

Beispiel:

Weil *Nelke* ein Hyponym von *Blume* ist, gilt:

Das ist eine Nelke. \Rightarrow *Das ist eine Blume.* und

Das ist eine Blume. $\not\Rightarrow$ *Das ist eine Nelke.*

d.h. $\llbracket \text{Das ist eine Nelke} \rrbracket \subset \llbracket \text{Das ist eine Blume} \rrbracket$.

7.2.2 Logische Äquivalenz

Zwei Sätze ϕ und ψ sind **logisch äquivalent** gdw
in **jedem** möglichen ÄK gilt: ϕ ist wahr **gdw** ψ wahr ist.

Notation: $\phi \Leftrightarrow \psi$ (alternativ: $\phi \approx \psi$)

Beispiele:

- (1) *Jeder Student lacht. \Leftrightarrow Kein Student lacht nicht.*
- (2) *Fritz ist größer als Karl. \Leftrightarrow Karl ist kleiner als Fritz.*
- (3) *Jeder ist ledig. \Leftrightarrow Keiner ist verheiratet.*
- (4) *Carla ist die Gattin von Paul. \Leftrightarrow Carla ist die Ehefrau von Paul.*

? Worauf gründet sich jeweils die logische Äquivalenz?

Logische Äquivalenz ist wechselseitige logische Implikation.

$$\phi \Leftrightarrow \psi \text{ gdw } \phi \Rightarrow \psi \text{ und } \psi \Rightarrow \phi.$$

Logische Äquivalenz ist Denotationsgleichheit.

$$\phi \Leftrightarrow \psi \text{ gdw } [[\phi]] = [[\psi]].$$

Synonymie ist eine mögliche Basis von logischer Äquivalenz.

Wenn α und β synonym sind, dann $\phi \Leftrightarrow \phi[\beta / \alpha]$, wobei ϕ und $\phi[\beta / \alpha]$ sich nur dadurch voneinander unterscheiden, dass α durch β ersetzt worden ist.

Beispiel:

Weil *Vetter* und *Cousin* Synonyme sind, gilt:

Paul ist Claras Vetter. \Leftrightarrow *Paul ist Claras Cousin.*

7.2.3 Kontrarität

Kontrarität ist – neben Subkontrarität und Kontradiktion – eine **Beziehung des logischen Gegensatzes** zwischen Sätzen.

Zwei Sätze ϕ und ψ sind (zueinander) **konträr** gdw
 ϕ und ψ **nicht zusammen wahr** sein können.

Für zwei konträre Sätze ϕ und ψ gilt:

- Immer wenn ϕ (ψ) wahr ist, ist ψ (ϕ) falsch.

ϕ und ψ sind **konträr** gdw $\phi \Rightarrow \neg\psi$.

Es ist **möglich**, dass zwei konträre Sätze zusammen falsch sind.

Beispiele:

- (1) *Paul ist klug.* × *Paul ist dumm.*
- (2) *Jeder Student lacht.* × *Kein Student lacht.*
- (3) *Fritz ist größer als Karl.* × *Fritz ist kleiner als Karl.*

☐ Worauf gründet sich jeweils die Kontrarität?

Inkompatibilität ist eine mögliche Basis von Kontrarietät.

Wenn zwei Ausdrücke α und β inkompatibel sind, dann
 $x \text{ ist } \alpha \Rightarrow \neg x \text{ ist } \beta$.

Beispiel:

Weil *rot* ein Heteronym von *blau* ist, gilt:

Der Ball ist rot. \Rightarrow *Der Ball ist nicht blau.*

und damit

Der Ball ist rot. \times *Der Ball ist blau.*

Aus der Kontrarität von Sätzen ϕ und ψ ergibt sich ihre Inkompatibilität und damit auch die Disjunktheit ihrer Denotationen.

ϕ und ψ sind konträr gdw ϕ und ψ inkompatibel sind.

ϕ und ψ sind konträr gdw $[[\phi]] \cap [[\psi]] = \emptyset$.

7.2.4 Subkontrarietät

Zwei Sätze ϕ und ψ sind (zueinander) **subkonträr** gdw ϕ und ψ nicht zusammen falsch sein können.

Für zwei subkonträre Sätze ϕ und ψ gilt:

- Immer wenn ϕ (ψ) falsch ist, ist ψ (ϕ) wahr.

ϕ und ψ sind subkonträr gdw $\neg\phi \Rightarrow \psi$.

Es ist möglich, dass zwei subkonträre Sätze zusammen wahr und damit kompatibel sind.

Beispiele:

- (1) *Paul ist nicht klug. / Paul ist nicht dumm.*
- (2) *Einige Studenten lachen. / Einige Studenten lachen nicht.*
- (3) *Fritz ist nicht größer als Karl. / Fritz ist nicht kleiner als Karl.*

7.2.5 Beziehung der Kontradiktion

Zwei Sätze ϕ und ψ sind **zueinander kontradiktorisch** gdw
 ϕ und ψ **nicht zusammen wahr** und **nicht zusammen falsch** sein
können.

Für zwei zueinander kontradiktorische Sätze ϕ und ψ gilt:

- Immer wenn ϕ (ψ) wahr ist, ist ψ (ϕ) falsch;
- immer wenn ϕ (ψ) falsch ist, ist ψ (ϕ) wahr.

ϕ und ψ sind zueinander kontradiktorisch gdw $\phi \Leftrightarrow \neg\psi$,
d.h. wenn $\phi \Rightarrow \neg\psi$ und $\neg\phi \Rightarrow \psi$.

? Ist es möglich, dass zwei zueinander kontradiktorische Sätze kompatibel sind?

Beispiele:

- (1) *Paul ist klug.* ×× *Paul ist nicht klug.*
- (2) *Einige Studenten lachen.* ×× *Kein Student lacht.*
- (3) *Fritz ist größer als Karl.* ×× *Fritz ist nicht größer als Karl.*

□ ? Worauf gründet sich in (1) – (3) die Beziehung der Kontradiktion?

Die Beziehung der Kontradiktion ist ein Sonderfall der Kontrarietät.

Alle Sätze, die zueinander kontradiktorisch sind, sind auch konträr,
aber nicht umgekehrt (weil konträre Sätze beide falsch sein können).

Die Beziehung der Kontradiktion ist auch ein Sonderfall der Subkontrarität.

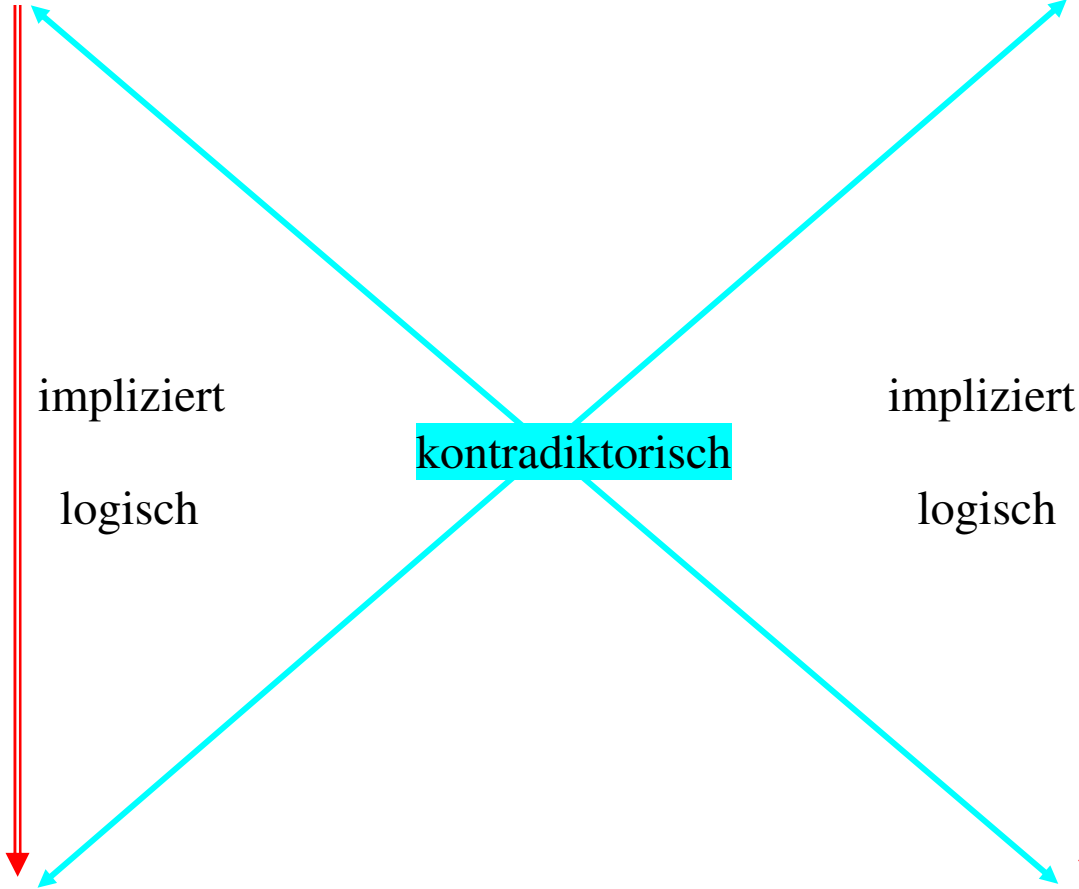
Alle Sätze, die zueinander kontradiktorisch sind, sind auch subkonträr, aber nicht umgekehrt (weil subkonträre Sätze beide wahr sein können).

Einen Gesamtüberblick über die betrachteten Beziehungen zwischen Sätzen liefert das **logische Quadrat**, in dem die möglichen logischen Verhältnisse von quantifizierenden Sätzen dargestellt werden.

$$\forall x\phi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi$$

$$\neg\exists x\phi \Leftrightarrow \forall x\neg\phi$$

konträr



impliziert
logisch

impliziert
logisch

kontradiktorisch



subkonträr

$$\exists x\phi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\phi$$

$$\neg\forall x\phi \Leftrightarrow \exists x\neg\phi$$

7.3 Logische Beziehungen und Bedeutungsbeziehungen

Logische Beziehungen zwischen Sätzen sind **streng genommen keine** Bedeutungsbeziehungen.

Sie betreffen lediglich das Verhältnis der Wahrheitsbedingungen bzw. der Denotationen der jeweiligen Sätze.

Zwischen Sätzen können logische Beziehungen bestehen, ohne dass die Sätze in ihren Bedeutungen etwas miteinander zu tun haben.

7.3.1 Logische Implikation vs. Bedeutungseinschluss

Eine logische Implikation $\phi \Rightarrow \psi$ kann darauf beruhen, dass die Bedeutung von ϕ die von ψ einschließt.

Beispiel:

Carla ist eine blonde Frau. \Rightarrow Carla ist blond.

Der Bedeutungseinschluss von ψ in ϕ ist aber keine notwendige Bedingung für $\phi \Rightarrow \psi$.

Die **Definition** der logischen Implikation sagt nur etwas über den Wahrheitswert von ψ für den Fall, dass ϕ wahr ist.

Falls ϕ falsch ist, könnte ψ sowohl wahr als auch falsch sein; falls ψ wahr ist, könnte ϕ sowohl wahr als auch falsch sein.

Damit gilt:

- Aus einem logisch falschen Satz folgt Beliebiges.

Beispiel:

Es regnet und es regnet nicht. \Rightarrow Der Mond ist ein Käse.

- Ein logisch wahrer Satz folgt aus Beliebigem.

Beispiel:

Der Mond ist ein Käse. \Rightarrow Es regnet oder es regnet nicht.

Logische Implikationen dieser Art scheinen kontraintuitiv zu sein, weil in beiden Fällen die Bedeutungen der beteiligten Sätze ϕ und ψ unabhängig voneinander sind.

Man spricht deshalb auch von Paradoxien der logischen Implikation.

Es gibt zahlreiche logische Theorien, in denen diese – wahrheitskonditional völlig korrekten – Implikationen ausgeschlossen oder zumindest ‚isoliert‘ werden sollen.

Für das praktische Schließen sind solche Sonderfälle **ungefährlich**:

Normalerweise werden nur kontingente Sätze ϕ und ψ als Prämissen und Konklusionen von Schlüssen verwendet.

Wenn ϕ und ψ beide kontingent sind und $\phi \Rightarrow \psi$, aber nicht $\psi \Rightarrow \phi$, dann liefert ein Schluss von ϕ auf ψ Information über einen Sachverhalt derart, dass die Information von ψ allgemeiner als die von ϕ ist.

Selbst wenn ϕ und ψ beide kontingent sind, muss $\phi \Rightarrow \psi$ nicht einen Bedeutungseinschluss von ψ in ϕ zum Ausdruck bringen.

Beispiel:

Heute ist Donnerstag. \Rightarrow Vorgestern war nicht Sonntag.

Die Beziehung des **Bedeutungseinschlusses** (der semantischen Implikation, des semantischen Enthaltens, des ‚Entailment‘) ist spezieller als die Beziehung der **logischen Implikation**.

7.3.2 Logische Äquivalenz vs. Bedeutungsgleichheit

Eine logische Äquivalenz $\phi \Leftrightarrow \psi$ **kann** darauf beruhen, dass ϕ und ψ synonym, d.h. in ihrer Bedeutung gleich sind.

Es gibt logisch äquivalente Sätze ϕ und ψ , die zwar deskriptiv synonym sind, sich aber in ihrer nicht-deskriptiven Bedeutung unterscheiden.

Beispiele:

(1) *Carla ist eine Frau.* \Leftrightarrow *Carla ist ein Weib.*

(2) *Herr Meier, Sie sind faul.* \Leftrightarrow *Meier, Du bist faul.*

Die Entscheidung für jeweils einen der beiden Sätze in (1) und (2) ist nicht eine Frage der deskriptiven Adäquatheit, sondern der Angemessenheit.

Die deskriptive Synonymie von ϕ und ψ ist eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für $\phi \Leftrightarrow \psi$.

Die **Definition** der logischen Äquivalenz fordert nur, dass ϕ und ψ immer denselben Wahrheitswert haben.

Damit sind auch einerseits alle logisch wahren und andererseits alle logisch falschen Sätze logisch äquivalent.

Beispiele:

(1) *Ein Dackel ist ein Hund. \Leftrightarrow Zwei plus zwei ist vier.*

(2) *Ein Dackel ist kein Hund. \Leftrightarrow Zwei plus zwei ist fünf.*

Selbst wenn ϕ und ψ beide kontingent sind, muss $\phi \Leftrightarrow \psi$ nicht die deskriptive Synonymie von ϕ und ψ zum Ausdruck bringen.

Beispiele:

(1) A. *Das Glas ist halb voll.* \Leftrightarrow B. *Das Glas ist halb leer.*

(2) A. *Heute ist Donnerstag.* \Leftrightarrow B. *Morgen ist Freitag.*

Die Sätze in (1) und (2) sind nur partiell deskriptiv synonym. Sie drücken zwar jeweils denselben Sachverhalt aus.

Dies geschieht aber auf verschiedene Weise.

In (1) bezieht sich Satz A auf den Inhalt des Glases, Satz B auf das, was im Glas fehlt.

In (2) bezieht sich Satz A auf den Tag der Äußerung, Satz (B) auf den Tag danach.

Die Beziehung der **Bedeutungsgleichheit** (der semantischen Äquivalenz, der Synonymie) ist spezieller als die Beziehung der **logischen Äquivalenz**.

Fazit

Da die Wahrheitsbedingungen bzw. Denotationen von Sätzen durch deren Bedeutungen, d.h. die von ihnen ausgedrückten Propositionen determiniert werden, lässt sich folgende wichtige **semantische Arbeitshypothese** formulieren:

Wenn zwischen zwei kontingenten Sätzen ϕ und ψ eine der betrachteten logischen Beziehungen besteht, dann **basiert** diese Beziehung auf einem Bedeutungszusammenhang zwischen ϕ und ψ .

7.4 Formale Semantik

Der logische Ansatz der Bedeutungsanalyse bildet die Basis von formal-semantischen Untersuchungen.

Die formale (oder wahrheitskonditionale) Semantik trifft die folgende **Grundvoraussetzung**:

Die **Bedeutung** eines beliebigen Satzes kann mit seinen Wahrheitsbedingungen bzw. seiner Denotation identifiziert werden.

Allgemein wird in der formalen Semantik die Bedeutung eines beliebigen Ausdrucks mit seiner Denotation identifiziert.

Die Identifizierung der Bedeutung eines Satzes mit seinen Wahrheitsbedingungen beinhaltet zwei Annahmen:

- (1) Durch die Bedeutung des Satzes ist festgelegt, unter welchen Bedingungen er wahr ist.

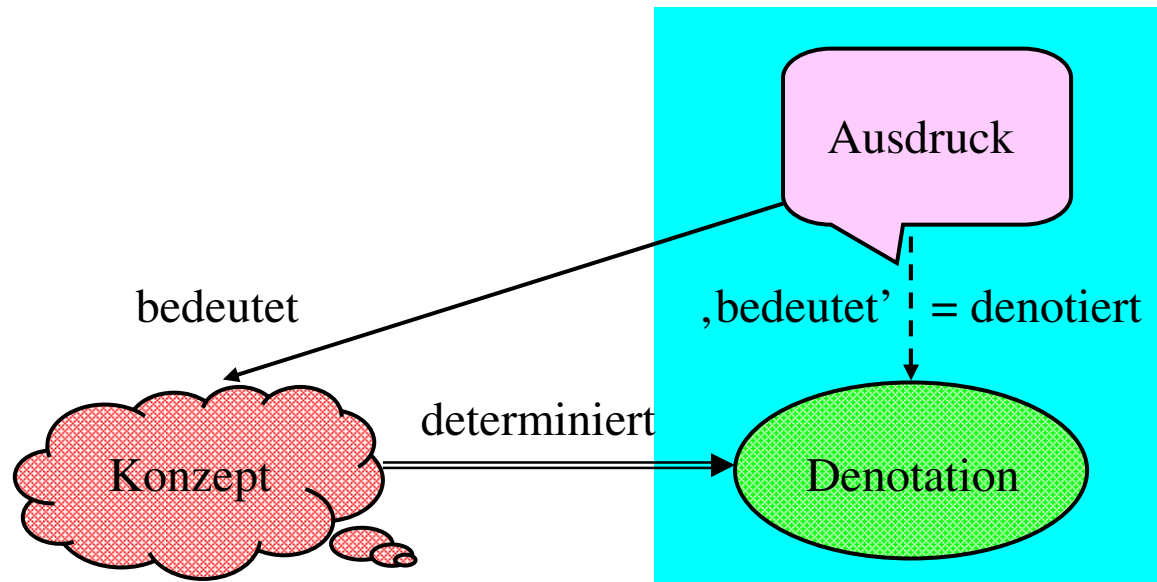
⇒ gerechtfertigt

- (2) Durch die Wahrheitsbedingungen des Satzes ist festgelegt, was er bedeutet.

⇒ ungerechtfertigt

Die formale Semantik ist auf Grund von **Annahme (2)** folgenden Beschränkungen unterworfen:

- Soziale, expressive und andere nicht-deskriptive Bedeutungsanteile werden **ausgeblendet**.
- Die deskriptive Bedeutung wird **nicht direkt erfasst**, sondern nur ihre Auswirkung auf Wahrheitsbedingungen und Denotation.
- Unterschiede in der deskriptiven Bedeutung bei identischen Wahrheitsbedingungen bzw. Denotationen **gehen verloren**.
- Der Zusammenhang mit anderen Phänomenen der Kognition wie Perzeption, Konzeptualisierung, Lernen, Planen etc. **bleibt unberücksichtigt**.



Zugleich weist die formale Semantik gegenüber anderen Herangehensweisen an Bedeutung **entscheidende Vorzüge** auf:

- Sie ist die bisher **einzigste Theorie**, die es erlaubt, die ‚Bedeutung‘ (sprich: Denotation) von Ausdrücken unter Zugrundelegung des Kompositionalitätsprinzips zu beschreiben.
- Sie verwendet eine **explizit definierte Sprache** der semantischen Struktur oder Repräsentation, d.h. der logischen Form von Ausdrücken.
- Sie enthält eine **detaillierte Theorie** logischer Wörter wie *und*, *nicht*, *alle*, *einige* usw.
- Sie liefert eine **präzise Beschreibung** der logischen Eigenschaften und Beziehungen von Sätzen.
- Sie berücksichtigt die systematische Bezogenheit von **Bedeutung** auf die **Welt**.

Diese Vorzüge machen formale Analysen zu einem **äußerst leistungsfähigen Instrumentarium** in der Semantik.

