6 Semantik von Modalausdrücken

6.1 Modalitäten

Natürliche Sprachen verfügen über Mittel, die es erlauben, etwas über die **Modalität**, d.h. die Art und Weise des Bestehens von Situationen auszudrücken. Insbesondere kann sprachlich reflektiert werden, dass eine bestimmte Sachlage notwendig, nur möglich oder aber unmöglich ist.

Modalausdrücke

Zu den Modalausdrücken gehören folgende Arten von Lexemen:

- Modale Satzadverbien
  notwendigerweise, *möglicherweise*, ..., *wahrscheinlich, sicher*, *vielleicht*, ...

- Modale Adjektive
  notwendig, *möglich*, ..., *wahrscheinlich*, *gewiss*, ..., *geboten*, *erlaubt*, ..., *lösbar*, *löslich,* ...

- Modalverben
  können, *müssen*, *dürfen, wollen*, ...

Bei der Interpretation von Sätzen mit Modalausdrücken müssen Alternativen zur tatsächlich bestehenden oder aktualen Welt betrachtet werden.

Beispiele:

(1) *Es ist möglich, dass Maria krank ist.*
(2) *Notwendigerweise ist zwei mal zwei gleich vier.*

Die Wahrheit von (1) hängt nicht davon ab, ob der eingebettete Satz *Maria ist krank* in der aktualen Welt wahr ist oder nicht, sondern davon, ob dieser Satz wahr sein kann. Satz (2) hingegen macht eine stärkere Aussage als nur die, dass der Sachverhalt, dass zwei mal zwei gleich vier ist, in unserer Welt besteht. Vielmehr drückt er aus, dass es rationalerweise undenkbar ist, dass der Satz *Zwei mal zwei ist gleich vier* falsch ist.

Folgende Arten von Modalitäten werden unterschieden:

- **Alethische** (logische, ontische) **Modalität**
  (griech. *aletheia* ‚Wahrheit')
  ‚notwendig oder möglich aus Gründen der Logik oder der Mathematik'

  Beispiel:

  (3) *Notwendigerweise ist Leipzig identisch mit Leipzig.*

- **Epistemische Modalität**
  (griech. *episteme* ‚Wissen')
  ‚notwendig oder möglich mit Bezug auf die Erwartungen, die die Sprecherin auf Grund ihres Erfahrungswissens hat'

  Beispiel:

  (4) *Es klingelt*; *das ist sicher Gerda*.

- **Deontische Modalität**
  (griech. *deon* ‚Pflicht')
  ‚notwendig (geboten) oder möglich (erlaubt) mit Bezug auf ein System von juristischen Gesetzen, sozialen Regeln, moralischen Normen, individuellen Überzeugungen etc.'

  Beispiel:

  (5) *Hans darf nach Hause gehen.*

- **Buletische Modalität**
  ‚notwendig oder möglich mit Bezug auf die Wünsche einer Person'

  Beispiel:

  (6) *Fritz möchte ein Bier trinken*.

- **Physische** (dispositionale) **Modalität**
  ‚notwendig oder möglich mit Bezug auf die physischen Umstände oder das Können einer Person'

  Beispiel:

  (7) *Maria kann Auto fahren*.

Modalverben wie *müssen* und *können* drücken in Abhängigkeit vom Kontext unterschiedliche Modalitäten aus.

Beispiele:

(8) *Max muss schlafen.*
  (a) Es ist epistemisch notwendig, dass Max schläft.
  (b) Es ist deontisch notwendig, dass Max schläft.
  (c) Es ist physisch notwendig, dass Max schläft.

(9) *Max kann schlafen.*
  (a) Es ist epistemisch möglich, dass Max schläft.
  (b) Es ist deontisch möglich, dass Max schläft.
  (c) Es ist physisch möglich, dass Max schläft.

6.2 Klassische Modalsemantik

[**Chierchia** 294-301, **Dowty** 126-131, **Lohnstein** 242-252]

6.2.1 Weltrelativierte Semantik von PL1

Die bisher verwendeten Modelle gingen stillschweigend davon aus, dass der semantische Wert von Sätzen und anderen Ausdrücken jeweils nur in Bezug auf die tatsächliche Welt zu bestimmen ist. Es gilt nun bei der Festlegung der Denotationen zu berücksichtigen, dass unsere Welt auch anders beschaffen sein könnte. Hierzu werden <u>mögliche Welten</u> (oder <u>mögliche Situationen</u>) in die Modellierung einbezogen.

Mögliche Welten

Der Begriff der möglichen Welt geht auf den Philosophen Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) zurück. Mögliche Welten sind <u>rational denkbare Alternativen</u> zur aktualen Welt. Es handelt sich also um Welten, die sich einerseits in bestimmter Hinsicht von der tatsächlich bestehenden Welt unterscheiden und andererseits dieser zumindest darin ähnlich sind, dass in ihnen dieselben logischen und mathematischen Gesetze gelten.

Die Weiterentwicklung der formalen Semantik unter Einbeziehung von möglichen Welten wird **Mögliche-Welten-Semantik** genannt. Dabei werden die Modelle um eine <u>Menge von möglichen Welten</u> W erweitert, und die Interpretationsfunktion I wird auf mögliche Welten relativiert. Damit kann die Denotation der nicht-logischen Konstanten und entsprechend auch der komplexeren Ausdrücke von Welt zu Welt variieren.

Die Menge der möglichen Welten ist im Gegensatz zur Menge der Zeitpunkte nicht geordnet. Allerdings braucht man zusätzlich zur Menge möglicher Welten eine <u>Zugänglichkeitsrelation</u> zwischen diesen Welten, um die verschiedenen Arten von Modalitäten, darunter insbesondere auch die alethischen, deontischen und epistemischen Modalitäten unterscheiden zu können.

Für <u>alethische Modalitäten</u> drückt die Zugänglichkeitsrelation eine Übereinstimmung der Welten bezüglich der logischen und mathematischen Gesetze und für <u>deontische Modalitäten</u> eine Ähnlichkeit in Bezug auf ein akzeptiertes Normensystem aus. Bei <u>epistemischen Modalitäten</u> wiederum besagt die Relation, dass nur solche Welten für einander zugänglich sind, die sich im erreichten Stand des Erfahrungswissens gleichen.

Im Falle der nachfolgend betrachteten alethischen Modalitäten ist die Zugänglichkeitsrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. sie ist eine <u>Äquivalenzrelation</u>. Demnach sind alle Welten für einander zugänglich, und die Relation muss im Modell nicht extra angegeben werden.

D6.1 Ein **modales Modell** M ist ein geordnetes Tripel $\langle D,W,I\rangle$, wobei
- (i) D die Diskursdomäne,
- (ii) W eine (nichtleere) Menge von möglichen Welten und
- (iii) I die Interpretationsfunktion von M ist, die jeder nicht-logischen Konstanten α relativ zu einer möglichen Welt w eine Denotation zuweist.

Entsprechend werden die Denotationen eines beliebigen wfA α auf mögliche Welten relativiert.

Notation:

$[\![\alpha]\!]^{M,w,g}$: die Denotation von α relativ zu dem Modell M, der Welt w und der Variablenbelegung g

Die weltrelativierten **semantischen Regeln** von PL1 unterscheiden sich von den zeitrelativierten Regeln **D5.2** und **D5.3** aus Abschnitt **5.1** nur dadurch, dass überall w an Stelle von t steht.

Beispiel:

Gegeben sei wieder die PL1-Sprache L' mit folgenden nicht-logischen Konstanten:

IK: $Anton', Berta', Cäsar', Erna'$
PK: $Frau', Mann', schlafen', vertrauen'$

Für L' sei $\langle D,W,I\rangle$ als ein modales Modell M angenommen, wobei gilt:

$D = \{\text{Anton,Berta,Cäsar,Erna}\}$,
$W = \{w_1, w_2\}$ und
$I(Anton', w_1) = I(Anton', w_2) = \text{Anton}$,
I analog für $Berta', Cäsar', Erna'$,
$I(Frau', w_1) = \{\text{Berta,Erna}\}$,
$I(Frau', w_2) = \{\text{Cäsar,Erna}\}$,
$I(Mann', w_1) = \{\text{Anton,Cäsar}\}$
$I(Mann', w_2) = \{\text{Anton, Berta}\}$,
$I(schlafen', w_2) = \{\text{Anton}\}$,
$I(schlafen', w_2) = \{\text{Cäsar}\}$,
$I(vertrauen', w_1) = \{\langle\text{Anton,Erna}\rangle, \langle\text{Cäsar,Erna}\rangle, \langle\text{Berta, Cäsar}\rangle\}$ und
$I(vertrauen', w_2) = \{\langle\text{Anton,Erna}\rangle, \langle\text{Berta, Cäsar}\rangle\}$.

Beispiel:

Eine Frau schläft.

SR(*Eine Frau schläft*)
$= \exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)]$

w_1: $[\![\exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)]]\!]^{M,w_1,g} = 0$, weil es kein $d \in D$ gibt, so dass $d \in I(Frau', w_1)$ und $d \in I(schlafen', w_1)$.

w_2: $[\![\exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)]]\!]^{M,w_2,g} = 1$, wegen Cäsar $\in I(Frau', w_2)$ und Cäsar $\in I(schlafen', w_2)$, d.h. Cäsar $\in \{\text{Cäsar,Erna}\}$ und Cäsar $\in \{\text{Cäsar}\}$.

6.2.2 Modale Prädikatenlogik der 1. Stufe (MPL1)

Um Modalausdrücke analysieren zu können, wird PL1 durch die Hinzunahme von zwei **Modaloperatoren** zur modalen Prädikatenlogik der 1. Stufe (MPL1) erweitert. Wie die (klassischen) Temporaloperatoren sind auch sie Ausdrücke vom Typ $\langle t, t\rangle$.

- Ergänzung zum **Vokabular** von PL1 (vgl. Abschnitt **1.2**):

  Möglichkeitsoperator: $\Diamond$ (alternativ: $\boldsymbol{M}$)
  Notwendigkeitsoperator: $\Box$ (alternativ: $\boldsymbol{N}$)

- Ergänzung zu den **syntaktischen Regeln** von PL1 (**D1.1**, Abschnitt **1.2**):

  (6) Wenn ϕ eine Formel ist, dann sind $\Diamond\phi$ und $\Box\phi$ Formeln.

  $\Diamond\phi$ wird gelesen als „Es ist möglich, dass ϕ (oder möglicherweise ϕ)."
  $\Box\phi$ wird gelesen als „Es ist notwendig, dass ϕ (oder notwendigerweise ϕ)."

Ähnlich wie die Temporaloperatoren $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{F}$ sowie $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{G}$ entsprechend als implizite $\exists$- bzw. $\forall$-Quantoren über Zeitpunkte verstanden werden, so betrachtet man nun die Modaloperatoren $\Diamond$ und $\Box$ als <u>implizite Quantoren über mögliche Welten</u>. Die Grundlagen dieses Verständnisses sind von Saul Kripke (1958) geschaffen worden.

- Ergänzung zu den (weltrelativierten) **semantischen Regeln** von PL1 (Abschnitt 6.2.1):

  (6) (a) $[\![\Diamond\phi]\!]^{M,w,g} = 1$ gdw für mindestens ein $w' \in W$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,w',g} = 1$.
  (b) $[\![\Box\phi]\!]^{M,w,g} = 1$ gdw für jedes $w' \in W$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,w',g} = 1$.

  $\Diamond\phi$ ist also wahr in w genau dann, wenn ϕ in <u>mindestens</u> einer Welt wahr ist. Und $\Box\phi$ ist wahr in w genau dann, wenn ϕ in einer <u>beliebigen</u> Welt wahr ist.

<u>Beispiele:</u>

(1) *Cäsar ist möglicherweise eine Frau.*

SR(*Cäsar ist möglicherweise eine Frau*)
$= \Diamond Frau'(Cäsar')$

w_1: $[\![\Diamond Frau'(Cäsar')]\!]^{M_1,w_1,g} = 1$, weil in w_2 gilt: $[\![Frau'(Cäsar')]\!]^{M_1,w_2,g} = 1$.

(2) *Es kann sein, dass ein Mann schläft.*

SR(*Es kann sein, dass ein Mann schläft*)
$= \Diamond\exists x[Mann'(x) \land schlafen'(x)]$

w_2: $[\![\Diamond\exists x[Mann'(x) \wedge schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w_2,g} = 1$, weil in w_1 gilt:
$[\![\exists x[Mann'(x) \wedge schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 1$.

(3) *Es ist notwendig, dass keine Frau schläft.*

SR(*Es ist notwendig, dass keine Frau schläft*)
$= \Box\neg\exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)]$

w_1: $[\![\Box\neg\exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 0$, weil in w_2 gilt:
$[\![\exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w_2,g} = 1$.

(4) *Notwendigerweise vertraut jeder Mann Erna.*

SR(*Notwendigerweise vertraut jeder Mann Erna*)
$= \Box\forall x[Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)]$

w_1: $[\![\Box\forall x[Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 1$, weil in w_1 gilt:
$[\![\forall x[Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 1$ und in w_2 gilt:
$[\![\forall x[Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)]]\!]^{M_1,w_2,g} = 1$.

Logische Beziehungen

Es gelten u.a. die folgenden logischen Implikationen und Äquivalenzen:

(1) $\Box\phi \Rightarrow \phi$
(2) $\phi \Rightarrow \Diamond\phi$
(3) $\Box\phi \Rightarrow \Diamond\phi$

? Warum gelten (1) und (2) nicht, wenn $\Box$ im Sinne von ‚deontisch notwendig (oder geboten)' bzw. $\Diamond$ im Sinne von ‚deontisch möglich (oder erlaubt)' verstanden werden?

(4) $\Box\phi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi$
(5) $\Diamond\phi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\phi$

Auf Grund von (4) und (5) sind die Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ gegenseitig definierbar, d.h. es reicht eigentlich aus, nur einen der beiden Operatoren zum Vokabular hinzuzufügen und den anderen nachträglich definitorisch einzuführen.

D6.2 $\Box\phi =_{def} \neg\Diamond\neg\phi$

D6.3 $\Diamond\phi =_{def} \neg\Box\neg\phi$

(6) $\neg\Diamond\phi \Leftrightarrow \Box\neg\phi$ ($\neg\Diamond\phi$ wird gelesen als „es ist unmöglich, dass ϕ".)
(7) $\Diamond\neg\phi \Leftrightarrow \neg\Box\phi$

Da die Modaloperatoren $\Box$ und $\Diamond$ eine existentielle bzw. universelle Quantifizierung über Welten w ausdrücken, ist eine Interaktion mit dem $\forall$- und dem $\exists$-Quantor zu erwarten.

(8) $\exists x[\Diamond P(x)] \Rightarrow \Diamond\exists x[P(x)]$
(9) $\Diamond\exists x[P(x)] \Leftrightarrow \exists x[\Diamond P(x)]$

Die Umkehrung der logischen Implikation in (8) und damit die logische Äquivalenz in (9) gelten nur, wenn man für jedes $w \in W$ dieselbe Diskursdomäne D voraussetzt (was hier aus Gründen der Vereinfachung getan wird).

Das wird klar, wenn man sich den Inhalt der beiden Formeln vergegenwärtigt:

(a) $\Diamond\exists x[P(x)]$: „Möglicherweise, d.h. in irgendeinem w gibt es ein x derart, dass gilt: $P(x)$."
(b) $\exists x[\Diamond P(x)]$: „Es gibt ein x derart, dass möglicherweise, d.h. in irgendeinem w gilt: $P(x)$."

Angenommen, die obige Voraussetzung werde nicht getroffen. Gelte nun (a), d.h. es ist möglich, dass ein x die Eigenschaft P hat. Damit muss nicht (b) gelten, d.h. dass ein aktual existierendes x möglicherweise die Eigenschaft P hat. Wenn es z.B. möglich ist, dass Angela Merkel ein Kind hat, dann folgt daraus nicht, dass es einen tätsächlich existierenden Menschen gibt, der möglicherweise ein Kind von Frau Merkel ist.

Analoges trifft für die folgenden Beziehungen zu:

(10) $\Box\forall x[P(x)] \Rightarrow \forall x[\Box P(x)]$
(11) $\forall x[\Box P(x)] \Leftrightarrow \Box\,\forall x[P(x)]$

Auch hier gelten die Umkehrung der logischen Implikation in (10) und damit die logische Äquivalenz in (11) nur, wenn man für jedes $w \in W$ dieselbe Diskursdomäne D voraussetzt.

(a) $\forall x[\Box P(x)]$: „Jedes x ist derart, dass notwendigerweise, d.h. in jedem w gilt: $P(x)$."
(b) $\Box\forall x[P(x)]$: „Notwendigerweise, d.h. in jedem w ist jedes x derart, dass gilt: $P(x)$."

Wieder angenommen, die obige Voraussetzung werde nicht getroffen. Gelte nun, dass jeder (tatsächlich existierende) Mensch notwendigerweise kein Kind von Angela Merkel ist. Dann folgt daraus nicht, dass notwendigerweise jeder Mensch kein Kind von Angela Merkel ist, dass sie also kein Kind hätte haben können.

In den folgenden Formeln kommt entsprechend $\Diamond$ zusammen mit $\forall$ und $\Box$ zusammen mit $\exists$ vor. Dabei gelten generell nicht die Umkehrungen der logischen Implikationen und damit auch nicht die jeweiligen logischen Äquivalenzen.

(12) $\Diamond\forall x[P(x)] \Rightarrow \forall x[\Diamond P(x)]$
(13) $\exists x[\Box P(x)] \Rightarrow \Box\,\exists x[P(x)]$

Beispiele:

(1) *Jeder Mann kann schlafen.*

Der Satz ist skopusambig und gibt deshalb Anlass zu zwei Lesarten (a) und (b).

(a) **SR1:** $\forall x[Mann'(x) \rightarrow \Diamond schlafen'(x)]$

w_1: $[\![\forall x[Mann'(x) \rightarrow \Diamond schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 1$, weil für jedes $d \in D$, für das gilt: $[\![Mann'(x)]\!]^{M_1,w_1,g[x \rightarrow d]} = 1$, ein w existiert, in dem gilt: $[\![schlafen'(x)]\!]^{M_1,w,g[x \rightarrow d]} = 1$.

w_2: $[\![\forall x[Mann'(x) \rightarrow \Diamond schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w_2,g} = 0$, weil zwar gilt: $[\![Mann'(x)]\!]^{M_1,w_2,g[x \rightarrow Berta]} = 1$, aber es kein w gibt, in dem gilt: $[\![schlafen'(x)]\!]^{M_1,w,g[x \rightarrow Berta]} = 1$.

(b) **SR2:** $\Diamond \forall x[Mann'(x) \rightarrow schlafen'(x)]$

w_1: $[\![\Diamond \forall x[Mann'(x) \rightarrow schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 0$, weil in keinem w gilt: $[\![\forall x[Mann'(x) \rightarrow schlafen'(x)]]\!]^{M_1,w,g} = 1$.

(2) *Eine Frau muss Cäsar vertrauen.*

Auch dieser Satz ist skopusambig und gibt Anlass zu zwei Lesarten (a) und (b):

(a) **SR1:** $\exists x[Frau'(x) \wedge \Box vertrauen'(Cäsar')(x)]$

w_1: $[\![\exists x[Frau'(x) \wedge \Box vertrauen'(Cäsar')(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 1$, weil für Berta $[\![Frau'(x)]\!]^{M_1,w_1,g[x \rightarrow Berta]} = 1$ und außerdem in jedem w gilt: $[\![vertrauen'(Cäsar')(x)]\!]^{M_1,w,g[x \rightarrow Berta]} = 1$.

(b) **SR2:** $\Box \exists x[Frau'(x) \wedge vertrauen'(Cäsar')(x)]$

w_1: $[\![\Box \exists x[Frau'(x) \wedge vertrauen'(Cäsar')(x)]]\!]^{M_1,w_1,g} = 0$, weil nicht in jedem w gilt: $[\![\exists x[Frau'(x) \wedge vertrauen'(Cäsar')(x)]]\!]^{M_1,w,g} = 1$.

$\boxed{?}$ Welchen Wahrheitswert hat der Satz in seiner Lesart (a) in der Welt w_2?

6.3 Indexsemantik

[**Dowty** 131-138, **Chierchia** 266-279, **Lohnstein** 252-256]

Bisher wurde ein Ausdruck entweder bezüglich eines Zeitpunktes oder bezüglich einer möglichen Welt interpretiert. Da die meisten Sprachen sowohl Modal- als auch Temporalausdrücke haben und die Interpretation von Ausdrücken allgemein sowohl vom Zeitpunkt als auch von der möglichen Welt abhängen kann, ist es wünschenswert, beide Bezugsweisen zusammenzuführen.

Beispiel:

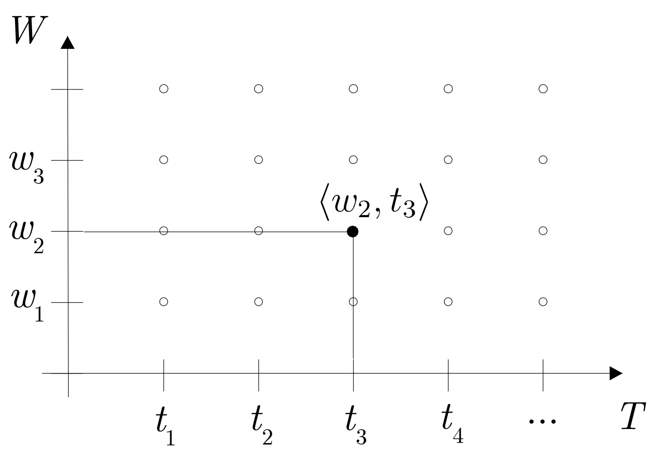
Möglicherweise werden Hans und Maria im nächsten Sommer heiraten.

Deshalb wird die Denotation eines Ausdrucks α nicht mehr nur zu einem Zeitpunkt t oder in einer möglichen Welt w, sondern vielmehr an einem Welt-Zeitpunkt $\langle w, t\rangle$ betrachtet, d.h. einem geordneten Paar, bestehend aus der Welt w und dem Zeitpunkt t.

6.3.1 Indizes

Es wird nunmehr sowohl eine Menge W von Welten als auch eine (geordnete) Menge von Zeitpunkten T angenommen. Das Kartesische Produkt der beiden Mengen $W \times T$ ist die Menge aller Paare $\langle w, t\rangle$ von Welt-Zeitpunkten. Ein Paar $\langle w, t\rangle \in W \times T$ wird ein **Index** genannt.

Ein Index kann als Koordinate in einem Koordinatensystem mit einer Weltachse W und einer Zeitachse T aufgefasst werden. Bewegt man sich auf der Zeitachse, so betrachtet man eine Welt zu verschiedenen Zeitpunkten, bewegt man sich auf der Weltachse, so betrachtet man verschiedene Welten zu einem Zeitpunkt. Damit steht z.B. der Index $\langle w_2, t_3\rangle$ für die Welt w_2 zum Zeitpunkt t_3.



Temporaloperatoren werden jetzt so verstanden, dass sie eine Verschiebung der Zeitkoordinate in die Vergangenheit oder in die Zukunft bewirken, und zwar so, dass dabei die Weltkorrdinate unverändert bleibt.
Für das Verständnis der Modaloperatoren gibt es jeweils zwei Möglichkeiten. So kann der $\Box$-Operator folgendermaßen interpretiert werden:

(i) ‚notwendig zur Zeit t'
(ii) ‚notwendig zu beliebigen Zeiten'

Damit nach der Interpretation (i) $\Box\phi$ an einem Index $\langle w,t\rangle$ wahr ist, muss ϕ an $\langle w',t\rangle$ für alle $w'\in W$ wahr sein, d.h. an allen Indizes mit derselben Zeitkoordinate t, aber möglicherweise verschiedenen Weltkoordinaten w'.

Wird dagegen (ii) gewählt, dann ist $\Box\phi$ an $\langle w,t\rangle$ wahr, falls ϕ an allen Indizes $\langle w',t'\rangle$, d.h. in allen $w'\in W$ und zu allen $t'\in T$ wahr ist. Nachfolgend wird die Interpretation (ii) gewählt.

Allgemein werden also Modaloperatoren als implizite Quantoren sowohl über beliebige Welten als auch über beliebige Zeitpunkte verstanden.

6.3.2 Modale und temporale Prädikatenlogik der ersten Stufe (MTPL1)

Die Syntax und Semantik von MTPL1 wird wieder durch eine passende Erweiterung von PL1 erhalten.

- Ergänzung zum **Vokabular** von PL1: $\Diamond, \Box, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}$

- Ergänzung zu den **syntaktischen Regeln** von PL1:

  (6) Wenn ϕ eine Formel ist, dann sind auch $\Diamond\phi$ und $\Box\phi$ Formeln.
  (7) Wenn ϕ eine Formel ist, dann sind $\boldsymbol{P}\phi$ und $\boldsymbol{F}\phi$ Formeln.

D6.4 Ein **Index-Modell** M ist ein geordnetes Quintupel $\langle D,W,T,<,I\rangle$, wobei
(i) D die Diskursdomäne,
(ii) W eine (nichtleere) Menge von möglichen Welten,
(iii) T eine (nichtleere) Menge von Zeitpunkten,
(iv) $<$ eine Ordnungsrelation auf T und
(v) I die Interpretationsfunktion von M ist, die jeder nicht-logischen Konstanten vom Typ a relativ zu einem Index $\langle w,t\rangle$, d.h. zu einem Zeitpunkt t und in einer möglichen Welt w eine Denotation aus D_a zuweist.

Entsprechend werden die Denotationen von beliebigen wfA α von MTPL1 auf eine mögliche Welt w und einen Zeitpunkt t relativiert.

Notation:

$[\![\alpha]\!]^{M,w,t,g}$: die Denotation von α relativ zu dem Modell M, der möglichen Welt w, dem Zeitpunkt t und der Variablenbelegung g

- Ergänzung zu den **semantischen Regeln** von PL1 :

(6) (a) $[\![\Diamond\phi]\!]^{M,w,t,g} = 1$ gdw für mindestens ein $w' \in W$ und für mindestens ein $t' \in T$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,w',t',g} = 1$.

(b) $[\![\Box\phi]\!]^{M,w,t,g} = 1$ gdw für jedes $w' \in W$ und für jedes $t' \in T$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,w',t',g} = 1$.

(7) (a) $[\![\boldsymbol{P}\phi]\!]^{M,w,t,g} = 1$ gdw für mindestens ein $t' \in T$ mit $t' < t$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,w,t',g} = 1$.

(b) $[\![\boldsymbol{F}\phi]\!]^{M,w,t,g} = 1$ gdw für mindestens ein $t' \in T$ mit $t < t'$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,w,t',g} = 1$.

<u>Beispiel:</u>

Gegeben sei das folgende Modell $M = \langle D, W, T, <, I \rangle$, wobei gilt:

$D = \{\text{Anton, Boris, Clara, Daphne}\}$,
$W = \{w_1, w_2\}$,
$T = \{t_1, t_2, t_3\}$,
$< = \{\langle t_1, t_2 \rangle, \langle t_2, t_3 \rangle, \langle t_1, t_3 \rangle\}$ und
$I(\mathit{Anton}', \langle w, t \rangle) = \text{Anton}$ für alle $\langle w, t \rangle \in W \times T$,
I analog für $\mathit{Boris}', \mathit{Clara}', \mathit{Daphne}'$,
$I(\mathit{Frau}', \langle w, t \rangle)$ gemäß folgender Zuordnungstabelle:

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	{Clara, Daphne}	{Clara, Daphne}	{Clara, Daphne}
w_2	{Clara, Daphne}	{Daphne}	$\varnothing$

$I(\mathit{Mann}', \langle w, t \rangle)$ entsprechend wie folgt:

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	{Anton, Boris}	{Anton, Boris}	{Anton, Boris}
w_2	{Anton, Boris}	{Anton, Boris, Clara}	{Anton, Clara}

$I(\mathit{schlafen}', \langle w, t \rangle)$ ergebe sich aus

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	{Clara}	{Anton, Clara}	{Anton, Boris, Clara}
w_2	$\varnothing$	$\varnothing$	{Anton, Boris, Clara, Daphne}

Und für $I\left(vertrauen', \langle w,t\rangle\right)$ sei festgelegt

$\langle w_i, t_j\rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	$\{\langle \text{Clara, Anton}\rangle, \langle \text{Clara, Boris}\rangle, \langle \text{Clara, Daphne}\rangle\}$	$\{\langle \text{Anton, Clara}\rangle, \langle \text{Clara, Anton}\rangle\}$	$\{\langle \text{Anton, Boris}\rangle, \langle \text{Boris, Boris}\rangle, \langle \text{Clara, Boris}\rangle, \langle \text{Daphne, Boris}\rangle\}$
w_2	$\{\langle \text{Daphne, Daphne}\rangle\}$	$\varnothing$	$D \times D$

Beispiele:

(1) *Eine Frau, die nicht schläft, vertraut Boris.*

SR(*Eine Frau, die nicht schläft, vertraut Boris*)
$= \exists x[Frau'(x) \wedge \neg schlafen'(x) \wedge vertrauen'(Boris')(x)]$

$\langle w_1, t_3\rangle$: $[\![\exists x[Frau'(x) \wedge \neg schlafen'(x) \wedge vertrauen'(Boris')(x)]]\!]^{M,w_1,t_3,g} = 1$,
weil es ein Individuum, nämlich Daphne gibt, so dass
$[\![Frau'(x)]\!]^{M,w_1,t_3,g[x\rightarrow \text{Daphne}]} = 1$, $[\![schlafen'(x)]\!]^{M,w_1,t_3,g[x\rightarrow \text{Daphne}]} = 0$ und auch
$[\![vertrauen'(Boris')(x)]\!]^{M,w_1,t_3,g[x\rightarrow \text{Daphne}]} = 1$ gilt.

$\langle w_2, t_2\rangle$: $[\![\exists x[Frau'(x) \wedge \neg schlafen'(x) \wedge vertrauen'(Boris')(x)]]\!]^{M,w_2,t_2,g} = 0$, weil
für kein Individuum $d \in D$ gilt: $[\![vertrauen'(Boris')(x)]\!]^{M,w_2,t_2,g[x\rightarrow d]} = 1$,
wodurch die gesamte Konjunktion den Wert 0 erhält.

(2) *Anton muss ein Mann sein.*

SR(*Anton muss ein Mann sein*) $= \Box Mann'(Anton')$

Der Wahrheitswert ist in allen Welt-Zeitpunkten gleich:
Für alle $i \in \{1,2\}$ und alle $j \in \{1,2,3\}$ ist $[\![\Box Mann'(Anton')]\!]^{M,w_i,t_j,g} = 1$,
weil für jedes $w' \in W$ und jedes $t' \in T$ gilt: $[\![Mann'(Anton')]\!]^{M,w',t',g} = 1$.

(3) *Irgendein Mann war früher eine Frau.*

SR(*Irgendein Mann war früher eine Frau*) $= \exists x[Mann'(x) \wedge \boldsymbol{P}(Frau'(x))]$

$\langle w_2, t_3\rangle$: $[\![\exists x[Mann'(x) \wedge \boldsymbol{P}(Frau'(x))]]\!]^{M,w_2,t_3,g} = 1$, weil für Clara gilt:
$[\![Mann'(x)]\!]^{M,w_2,t_3,g[x\rightarrow \text{Clara}]} = 1$ und $[\![\boldsymbol{P}(Frau'(x))]\!]^{M,w_2,t_3,g[x\rightarrow \text{Clara}]} = 1$.
Letzteres ist der Fall, da $t_1 < t_3$ und $[\![Frau'(x)]\!]^{M,w_2,t_1,g[x\rightarrow \text{Clara}]} = 1$.

$\langle w_1, t_1 \rangle$: $[\![\exists x[Mann'(x) \wedge \boldsymbol{P}(Frau'(x))]]\!]^{M,w_1,t_1,g} = 0$, weil für jedes Individuum $d \in D$ insbesondere gilt: $[\![\boldsymbol{P}(Frau'(x))]\!]^{M,w_1,t_1,g[x\rightarrow d]} = 0$, da es kein $t' \in T$ mit $t' < t_1$ gibt.

? Welchen Wahrheitswert hat der Satz *Jeder vertraut sich selbst* in $\langle w_2, t_3 \rangle$?

Logische Beziehungen

Es gelten u.a. die folgenden logischen Implikationen:

(1) $\Box\phi \Rightarrow \boldsymbol{F}\phi$
(2) $\Box\phi \Rightarrow \boldsymbol{P}\phi$
(3) $\boldsymbol{F}\phi \Rightarrow \Diamond\phi$
(4) $\boldsymbol{P}\phi \Rightarrow \Diamond\phi$

Indexikalische Ausdrücke

Die Zeit und die Welt einer Äußerung gehören zu den Parametern, die für die kontextabhängige Interpretation von natürlichsprachlichen Ausdrücken relevant sind. Andere kontextuelle Parameter sind z.B. die Sprecherin, die Adressatin, der Ort der Äußerung und eventuell der Gegenstand, auf den in der Äußerungssituation mit einem Ausdruck verwiesen wird.

Solche Aspekte der Äußerungssituation spielen eine besondere Rolle für die Festlegung der Denotation von deiktischen oder indexikalischen Ausdrücken, zu denen – neben den Tempora – Personalpronomina wie *ich* und *du*, lokale Adverbien wie *hier* und *dort*, temporale Adverbien wie *jetzt* und *morgen* und Demonstrativa wie *dies-* und *jen-* gehören.

Beispiele:

(1) *Ich bin hier, und du bist dort.*
(2) *Paul ist jetzt in Leipzig und wird morgen nach Köln fahren.*
(3) *Maria mag dieses Buch, und Hans jenes Buch.*

Eine mögliche Strategie ist, die Relativierung von semantischen Werten auf mögliche Welten und Zeitpunkte entsprechend zu generalisieren. Nach David Lewis (1972) beinhaltet dann ein Index nicht nur die Koordinaten w und t, sondern außerdem mindestens die Spezifikation einer Sprecherin s, einer Adressatin *a* und eines Ortes *p*. Als Symbol für einen solchen Index wird i verwendet.

Beispielsweise kann dann das Pronomen *ich* als ein Individuenterm behandelt werden, dessen Denotation relativ zu dem Modell M, dem Index i und der Variablenbelegung g durch folgende semantische Regel angegeben wird:

- $[\![ich]\!]^{M,i,g} = s$.

Übungen

Ü6.1 Geben Sie die semantischen Repräsentationen der folgenden Sätze in MPL1 an:

(1) *Laika muss fliegen.*
(2) *Juri kann fliegen.*
(3) *Valentina muss fliegen können.*
(4) *Laika kann fliegen müssen.*

Ü6.2 Es sei das modale Modell $M = \langle D, W, I \rangle$ gegeben, wobei gilt:

$D = \{\text{Laika, Juri, Valentina}\}$,
$W = \{w_1, w_2, w_3\}$ und
$I(Laika', w_1) = I(Laika', w_2) = I(Laika', w_3) = \text{Laika}$,
I analog für $Juri'$ und $Valentina'$,
$I(Mensch', w_i) = \{\text{Juri, Valentina}\}$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$,
$I(Hund', w_i) = \{\text{Laika}\}$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$,
$I(fliegen', w_1) = \{\text{Laika}\}$,
$I(fliegen', w_2) = \{\text{Laika, Juri, Valentina}\}$ und
$I(fliegen', w_3) = \{\text{Juri, Valentina}\}$.

Geben Sie die semantischen Repräsentationen für die folgenden Sätze an und bestimmen Sie ihre Wahrheitswerte in M relativ zu der in Klammern angegebenen Welt:

(1) *Jeder Hund fliegt.* (w_2)
(2) *Ein Mensch fliegt.* (w_3)
(3) *Wenn ein Mensch fliegt, dann fliegt auch ein Hund.* (w_1)

Ü6.3 Das Modell aus **Ü6.2** sei wie folgt zu einem Index-Modell $M' = \langle D, W, T, I' \rangle$ erweitert:

$T = \{t_1, t_2\}$,
D und W wie oben und
$I'\left(Juri', \langle w_i, t_j \rangle\right) = \text{Juri}$ für alle $\langle w_i, t_j \rangle \in W \times T$,
I' analog für $Laika'$ und $Valentina'$,
$I'\left(Mensch', \langle w_i, t_j \rangle\right) = \{\text{Juri, Valentina}\}$ für alle $\langle w_i, t_j \rangle \in W \times T$,
$I'\left(Hund', \langle w_i, t_j \rangle\right) = \{\text{Laika}\}$ für alle $\langle w_i, t_j \rangle \in W \times T$ und
$I'\left(fliegen', \langle w_i, t_j \rangle\right)$ definiert durch folgende Tabelle:

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2
w_1	$\varnothing$	{Laika}
w_2	{Laika}	{Laika, Juri}
w_3	{Juri, Valentina}	{Valentina}

Geben Sie die semantischen Repräsentationen für die folgenden Sätze an und bestimmen Sie ihre Wahrheitswerte in M' an den in Klammern angegebenen Indizes:

(1) *Juri kann fliegen.* $(\langle w_1, t_1 \rangle)$

(2) *Laika muss fliegen können.* $(\langle w_3, t_2 \rangle)$

(3) *Alle werden fliegen können.* $(\langle w_2, t_1 \rangle)$
(Lesart: $\forall$ hat den engsten, $\boldsymbol{F}$ den weitesten Skopus)

(4) *Möglicherweise flog keiner.* $(\langle w_3, t_2 \rangle)$

Ü6.4 Gelten die folgenden Formeln im Modell M'? Wenn nicht, wie müsste dann ein Modell aussehen, damit sie wahr sind?

(1) $\Diamond Mensch'(Laika')$
(2) $\Diamond \boldsymbol{F} \neg \exists x[fliegen'(x)]$
(3) $\Box \forall x[Hund'(x) \rightarrow fliegen'(x)]$

Ü6.5 Nach Erweiterung der λ-Typenlogik (TLλ) durch die Modaloperatoren $\Diamond$ und $\Box$ können Modalausdrücke durch λ-Terme repräsentiert werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass sie verschiedenen syntaktischen Kategorien angehören.

U.a. lassen sich die folgenden Zuordnungen für modale Satzadverbien treffen (wobei p eine Variable vom Typ t ist):

- **SR**(*notwendigerweise*) $= \lambda p\,[\Box p]$
- **SR**(*möglicherweise*) $= \lambda p\,[\Diamond p]$

Geben Sie die entsprechenden λ-Terme für die Modalverben *können* und *müssen* unter der Voraussetzung an, dass Auxiliare als Modifikatoren von VPn fungieren, d.h. vom Typ $\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$ sind.

Ü6.6 Leiten Sie die semantische Repräsentation des Satzes *Notwendigerweise kann Laika nicht fliegen* unter Verwendung der in **Ü 6.5** vorausgesetzten λ-Terme für das Satzadverb und das Modalverb ab.